

Algebra

Ivan Prokić

Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad

Predavanje 3

Na prethodnom času

- Relacije ekvivalencije
 - Klase ekvivalencije i faktor skup (particije)
 - Skup \mathbb{Z}_n
- Relacije poretka (parcijalno uređeni skupovi)
 - Haseov dijagram
 - Najmanji, najveći, min i max elementi
 - Supremum i infimum
 - Lanci i dobro uređeni skupovi

Funkcije

Funkcije

Definicija (Funkcije)

Funkcija je binarna relacija kod koje ne postoje dva uređena para takva da su im prve komponente jednake a druge različite.

Napomena

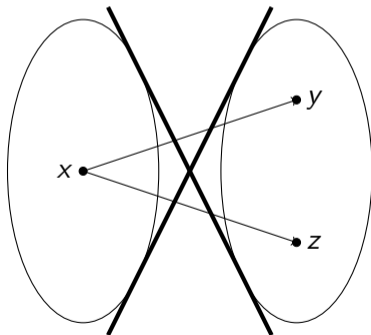
Umesto $(x, y) \in f$ pišemo $f(x) = y$

Definicija

*Ako je f funkcija tada se skup prvih komponenti (originala) $\mathcal{D}(f)$ naziva **domen**, a skup drugih komponenti $\mathcal{A}(f)$ **skup slika** (piše se još i $\text{Im}(f)$).*

Napomena

Druga definicija funkcije: $f(x) \neq f(y) \Rightarrow x \neq y$



Restrikcija funkcije

Definicija (Restrikcija funkcije)

Ako je $g \subseteq f$ tada se g naziva restrikcija funkcije f i piše se $g = f_{\mathcal{D}(g)}$.

Primer

1. Funkcija $g = \{(a, 2), (b, 3)\}$ je restrikcija funkcije $f = \{(a, 2), (b, 3), (c, 4)\}$ na skupu $\{a, b\}$, tj.

$$f_{\mathcal{D}(g)} = f_{\{a,b\}} = g$$

2. Funkcija $\sin_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}(x)$ je restrikcija funkcije $\sin(x)$ na intervalu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Injektivnost

Definicija (Injektivna funkcija (1 – 1))

Za funkciju f kažemo da je injektivna (ili 1 – 1) ako ne sadrži dva uređena para kod kojih su prve komponente različite, a druge jednake.

Napomena

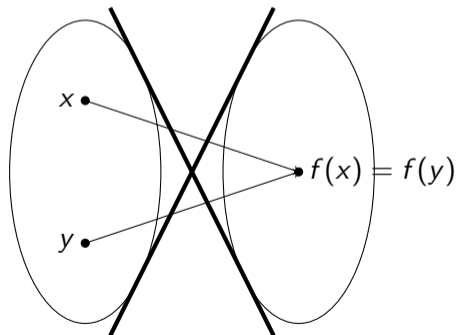
Druga definicija injektivnosti:

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

Primer

Naći injektivne funkcije:

- $f_1 = \{(a, 1), (b, 2), (a, 3), (c, 1)\}$
- $f_2 = \{(a, 1), (b, 2), (c, 1)\}$
- $f_3 = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3)\}$



Injektivnost

Definicija (Injektivna funkcija (1 – 1))

Za funkciju f kažemo da je injektivna (ili 1 – 1) ako ne sadrži dva uređena para kod kojih su prve komponente različite, a druge jednake.

Napomena

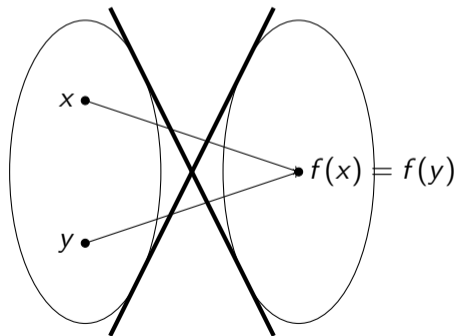
Druga definicija injektivnosti:

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

Primer

Naći injektivne funkcije:

- $f_1 = \{(a, 1), (b, 2), (a, 3), (c, 1)\} \quad \perp$
- $f_2 = \{(a, 1), (b, 2), (c, 1)\} \quad \perp$
- $f_3 = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3)\} \quad \top$



Funkcija skupa A u skup B . Sirjektivnost (na)

Definicija (Funkcija skupa A u skup B)

Kažemo da je f funkcija skupa A u skup B , u oznaci $f : A \rightarrow B$, ako važi:

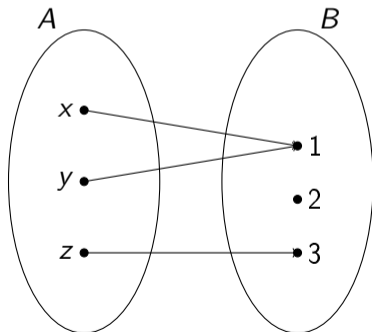
1. f je funkcija
2. $\mathcal{D}(f) = A$
3. $\mathcal{A}(f) \subseteq B$

Primer

Za $A = \{x, y, z\}$ i $B = \{1, 2, 3\}$, jedna funkcija $f : A \rightarrow B$ je $f = \{(x, 1), (y, 1), (z, 3)\}$

Definicija (Sirjektivnost (na))

Funkcija $f : A \rightarrow B$ je sirjektivna ako važi $\mathcal{A}(f) = B$, i tada pišemo $f : A \xrightarrow{na} B$.



Bijekcija

Napomena

Ako je funkcija $f : A \rightarrow B$ injektivna, onda pišemo $f : A \xrightarrow{1-1} B$

Definicija (Bijekcija)

Ako je funkcija $f : A \rightarrow B$ injektivna i surjektivna, tada kažemo da je f bijekcija i pišemo $f : A \xrightarrow[na]{1-1} B$.

Primer

Za $A = \{x, y, z\}$ i $B = \{1, 2, 3\}$, jedna bijekcija $f : A \rightarrow B$ je $f = \{(x, 2), (y, 1), (z, 3)\}$

Napomena

Bijekcije se još zovu permutacije i uzajamno jednoznačna preslikavanja

Vežbanje

Primer

Dati su skupovi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ i $B = \{a, b, c\}$, binarne relacije i tabela. Popuniti tabelu sa DA i NE.

$$f_1 = \{(1, a), (2, b)\}$$

$$f_3 = \{(1, c), (2, c), (3, b), (4, b)\}$$

$$f_2 = \{(1, a), (2, b), (3, c), (4, a), (2, a)\}$$

$$f_4 = \{(1, c), (2, b), (3, b), (4, a)\}$$

	f_i je funkcija	1 – 1	$f_i : A \rightarrow B$	$f_i : A \xrightarrow{na} B$	$f_i : A \xrightarrow{1-1} B$	$f_i : A \xrightarrow[na]{1-1} B$
f_1						
f_2						
f_3						
f_4						

Vežbanje

Primer

Dati su skupovi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ i $B = \{a, b, c\}$, binarne relacije i tabela. Popuniti tabelu sa DA i NE.

$$f_1 = \{(1, a), (2, b)\}$$

$$f_3 = \{(1, c), (2, c), (3, b), (4, b)\}$$

$$f_2 = \{(1, a), (2, b), (3, c), (4, a), (2, a)\}$$

$$f_4 = \{(1, c), (2, b), (3, b), (4, a)\}$$

	f_i je funkcija	1 – 1	$f_i : A \rightarrow B$	$f_i : A \xrightarrow{na} B$	$f_i : A \xrightarrow{1-1} B$	$f_i : A \xrightarrow[na]{1-1} B$
f_1	DA	DA	NE	NE	NE	NE
f_2						
f_3						
f_4						

Vežbanje

Primer

Dati su skupovi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ i $B = \{a, b, c\}$, binarne relacije i tabela. Popuniti tabelu sa DA i NE.

$$f_1 = \{(1, a), (2, b)\}$$

$$f_3 = \{(1, c), (2, c), (3, b), (4, b)\}$$

$$f_2 = \{(1, a), (2, b), (3, c), (4, a), (2, a)\}$$

$$f_4 = \{(1, c), (2, b), (3, b), (4, a)\}$$

	f_i je funkcija	1 – 1	$f_i : A \rightarrow B$	$f_i : A \xrightarrow{na} B$	$f_i : A \xrightarrow{1-1} B$	$f_i : A \xrightarrow[na]{1-1} B$
f_1	DA	DA	NE	NE	NE	NE
f_2	NE	NE	NE	NE	NE	NE
f_3						
f_4						

Vežbanje

Primer

Dati su skupovi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ i $B = \{a, b, c\}$, binarne relacije i tabela. Popuniti tabelu sa DA i NE.

$$f_1 = \{(1, a), (2, b)\}$$

$$f_3 = \{(1, c), (2, c), (3, b), (4, b)\}$$

$$f_2 = \{(1, a), (2, b), (3, c), (4, a), (2, a)\}$$

$$f_4 = \{(1, c), (2, b), (3, b), (4, a)\}$$

	f_i je funkcija	1 – 1	$f_i : A \rightarrow B$	$f_i : A \xrightarrow{na} B$	$f_i : A \xrightarrow{1-1} B$	$f_i : A \xrightarrow[na]{1-1} B$
f_1	DA	DA	NE	NE	NE	NE
f_2	NE	NE	NE	NE	NE	NE
f_3	DA	NE	DA	NE	NE	NE
f_4						

Vežbanje

Primer

Dati su skupovi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ i $B = \{a, b, c\}$, binarne relacije i tabela. Popuniti tabelu sa DA i NE.

$$f_1 = \{(1, a), (2, b)\}$$

$$f_3 = \{(1, c), (2, c), (3, b), (4, b)\}$$

$$f_2 = \{(1, a), (2, b), (3, c), (4, a), (2, a)\}$$

$$f_4 = \{(1, c), (2, b), (3, b), (4, a)\}$$

	f_i je funkcija	1 – 1	$f_i : A \rightarrow B$	$f_i : A \xrightarrow{na} B$	$f_i : A \xrightarrow{1-1} B$	$f_i : A \xrightarrow[na]{1-1} B$
f_1	DA	DA	NE	NE	NE	NE
f_2	NE	NE	NE	NE	NE	NE
f_3	DA	NE	DA	NE	NE	NE
f_4	DA	NE	DA	DA	NE	NE

Broj elemenata skupa

Napomena

- Ako je $A = \{1, 2, 3, 4\}$ i $B = \{a, b, c\}$, da li postoji $f : A \xrightarrow{1-1} B$ i da li postoji $g : B \xrightarrow{na} A$?
- Da li je $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ data sa $f(n) = 2n$ injektivna?

Definicija

Ako postoji bijekcija $f : A \xrightarrow[na]{1-1} B$ onda kažemo da A i B imaju isti broj elemenata i pišemo $|A| = |B|$ i $\text{Card}(A) = \text{Card}(B)$.

Teorema

- Za konačan skup A postoji bijekcija $f : A \xrightarrow[na]{1-1} \{1, 2, \dots, n\}$ i tada pišemo $|A| = n$.
- Skup je beskonačan ako se može injektivno preslikati u svoj pravi podskup.
- Skup A sa istim brojem elemenata kao \mathbb{N} zove se **prebrojiv**, i pišemo $|A| = \aleph_0$
- Skup A sa istim brojem elemenata kao \mathbb{R} zove se **neprebrojiv**, i pišemo $|A| = c$

Konačni skupovi sa istim brojem elemenata

Teorema

Neka su A i B konačni skupovi i neka je $|A| = |B|$. Tada važi za $f : A \rightarrow B$:

- *ako je f injektivna onda mora biti i surjektivna*
- *ako je f surjektivna onda mora biti i injektivna*

Napomena

Ovo nećemo dokazivati.

Još jedan način zapisa funkcija (i relacija)

Napomena

Binarnu relaciju $f = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)\}$ možemo zapisati na sledeći način

$$f = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

Iz ovog zapisa možemo lakše uočiti neke osobine od f :

- f je funkcija akko su svaka dva elementa u prvoj vrsti različita
- f je funkcija iz skupa A u skup B akko je f funkcija, $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = A$ i $\{b_1, b_2, \dots, b_n\} \subseteq B$
- f je injektivna funkcija akko su i u drugoj vrsti svaka dva elementa različita
- f je surjektivna funkcija iz skupa A u skup B akko je i $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$

Inverzna funkcija i kompozicija

Inverzna funkcija

Primer

Setimo se inverzne binarne relacije. Za sledeće funkcije odredi inverzne binarne relacije:

1. $f = \{(1, a), (2, b)\}$

2. $g = \{(1, a), (2, b), (3, b)\}$

Inverzna funkcija

Primer

Setimo se inverzne binarne relacije. Za sledeće funkcije odredi inverzne binarne relacije:

1. $f = \{(1, a), (2, b)\}$

$$f^{-1} = \{(a, 1), (b, 2)\}$$

2. $g = \{(1, a), (2, b), (3, b)\}$

$$g^{-1} = \{(a, 1), (b, 2), (b, 3)\}$$

Inverzna funkcija

Primer

Setimo se inverzne binarne relacije. Za sledeće funkcije odredi inverzne binarne relacije:

1. $f = \{(1, a), (2, b)\}$

$$f^{-1} = \{(a, 1), (b, 2)\}$$

2. $g = \{(1, a), (2, b), (3, b)\}$

$$g^{-1} = \{(a, 1), (b, 2), (b, 3)\}$$

Teorema

Neka je f funkcija. Inverzna relacija f^{-1} je funkcija (i tada se zove **inverzna funkcija**) akko je f injektivna. Dalje, ako je $f : A \rightarrow A$ bijekcija tada je i $f^{-1} : A \rightarrow A$ bijekcija.

Dokaz

f je injektivna akko $(\forall x, z \in \mathcal{D}(f))(\forall y \in \mathcal{A}(f))((x, y) \in f \wedge (z, y) \in f) \Rightarrow x = z$. Ovo je ekvivalentno sa

$$(\forall y \in \mathcal{D}(f^{-1}))(\forall x, z \in \mathcal{A}(f^{-1}))((y, x) \in f^{-1} \wedge (y, z) \in f^{-1}) \Rightarrow x = z$$

gde zapravo piše da je f^{-1} funkcija.

Inverzna funkcija: primeri

Za sledeće funkcije odrediti inverzne funkcije (ako postoje):

1. $f_1 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$

2. $f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

3. $f_3 = \{(x, 2x + 1) \mid x \in \mathbb{R}\}$

4. $f_4 = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$

5. $f_5 = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\}$

6. $f_6 = \{(x, e^x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

Inverzna funkcija: primeri

Za sledeće funkcije odrediti inverzne funkcije (ako postoje):

1. $f_1 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$

$$f_1^{-1} = \{(2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$$

2. $f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

3. $f_3 = \{(x, 2x + 1) \mid x \in \mathbb{R}\}$

4. $f_4 = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$

5. $f_5 = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\}$

6. $f_6 = \{(x, e^x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

Inverzna funkcija: primeri

Za sledeće funkcije odrediti inverzne funkcije (ako postoje):

1. $f_1 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$

$$f_1^{-1} = \{(2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$$

2. $f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$$f_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. $f_3 = \{(x, 2x + 1) \mid x \in \mathbb{R}\}$

4. $f_4 = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$

5. $f_5 = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\}$

6. $f_6 = \{(x, e^x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

Inverzna funkcija: primeri

Za sledeće funkcije odrediti inverzne funkcije (ako postoje):

1. $f_1 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$

$f_1^{-1} = \{(2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$

2. $f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$f_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

3. $f_3 = \{(x, 2x + 1) \mid x \in \mathbb{R}\}$

$f_3^{-1} = \{(x, \frac{x-1}{2}) \mid x \in \mathbb{R}\}$

4. $f_4 = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$

5. $f_5 = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\}$

6. $f_6 = \{(x, e^x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

$$f_3^{-1} = \{(2x + 1, x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{(t, \frac{t-1}{2}) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Inverzna funkcija: primeri

Za sledeće funkcije odrediti inverzne funkcije (ako postoje):

1. $f_1 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$

$$f_1^{-1} = \{(2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$$

2. $f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$$f_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. $f_3 = \{(x, 2x + 1) \mid x \in \mathbb{R}\}$

$$f_3^{-1} = \{(x, \frac{x-1}{2}) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

4. $f_4 = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$

ne postoji, f_4 nije 1-1

5. $f_5 = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\}$

6. $f_6 = \{(x, e^x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

$$f_4(1) = f_4(-1)$$

Inverzna funkcija: primeri

Za sledeće funkcije odrediti inverzne funkcije (ako postoje):

1. $f_1 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$

$f_1^{-1} = \{(2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$

2. $f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$f_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

3. $f_3 = \{(x, 2x + 1) \mid x \in \mathbb{R}\}$

$f_3^{-1} = \{(x, \frac{x-1}{2}) \mid x \in \mathbb{R}\}$

4. $f_4 = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$

ne postoji, f_4 nije 1-1

5. $f_5 = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\}$

$f_5^{-1} = \{(x, \sqrt{x}) \mid x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\}$

6. $f_6 = \{(x, e^x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

$$f_5^{-1} = \{(x^2, x) \mid x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\} = \{(t, \sqrt{t}) \mid t \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\}$$

Inverzna funkcija: primeri

Za sledeće funkcije odrediti inverzne funkcije (ako postoje):

1. $f_1 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$

$f_1^{-1} = \{(2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$

2. $f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$f_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

3. $f_3 = \{(x, 2x + 1) \mid x \in \mathbb{R}\}$

$f_3^{-1} = \{(x, \frac{x-1}{2}) \mid x \in \mathbb{R}\}$

4. $f_4 = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$

ne postoji, f_4 nije 1-1

5. $f_5 = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\}$

$f_5^{-1} = \{(x, \sqrt{x}) \mid x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\}$

6. $f_6 = \{(x, e^x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

$f_6^{-1} = \{(x, \ln x) \mid x \in \mathbb{R}^+\}$

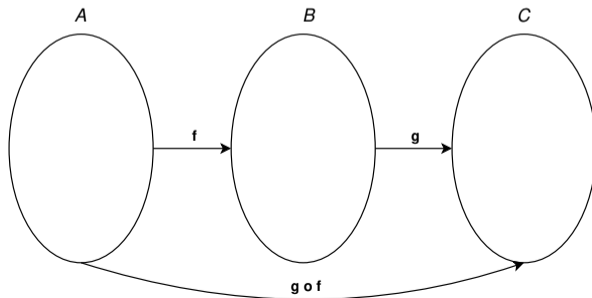
$$f_6^{-1} = \{(e^x, x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{(t, \ln t) \mid t \in \mathbb{R}^+\}$$

Kompozicija funkcija

Definicija (Kompozicija funkcija)

Neka su A, B i C neprazni skupovi i $f : A \rightarrow B$ i $g : B \rightarrow C$ funkcije. Tada je i $g \circ f : A \rightarrow C$ takođe funkcija definisana sa

$$(\forall x \in A)(g \circ f)(x) = g(f(x))$$



Kompozicija funkcija: osobine

Teorema

Neka je $A \neq \emptyset$ i funkcije $f, g, h : A \rightarrow A$. Tada važi $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$, tj. važi asocijativnost.

Dokaz

Po definiciji kompozicije za $x \in \mathcal{D}(h)$ imamo

$$((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x))) = f((g \circ h)(x)) = (f \circ (g \circ h))(x)$$

Kompozicija funkcija: osobine

Teorema

Neka je $A \neq \emptyset$ i funkcije $f, g, h : A \rightarrow A$. Tada važi $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$, tj. važi asocijativnost.

Dokaz

Po definiciji kompozicije za $x \in \mathcal{D}(h)$ imamo

$$((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x))) = f((g \circ h)(x)) = (f \circ (g \circ h))(x)$$

Teorema

Neka je $A \neq \emptyset$ i funkcije $f, g : A \rightarrow A$. Tada važi

1. ako su f i g injektivne tada je i $f \circ g$ injektivna;
2. ako su f i g surjektivne tada je i $f \circ g$ surjektivna.

Dokaz

1. Treba pokazati $(f \circ g)(x) = (f \circ g)(y) \Rightarrow x = y$. Pošto je f injektivna, iz $f(g(x)) = f(g(y))$ sledi $g(x) = g(y)$, a odavde iz injektivnosti g sledi $x = y$.

Kompozicija funkcija: primeri

Neka je $A = \{1, 2, 3\}$ i $f, g : A \rightarrow A$ zadate sa $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ i $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Odrediti (ako je moguće): f^{-1} , g^{-1} , $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $(g \circ f)^{-1}$ i $f^{-1} \circ g^{-1}$.

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(g \circ f)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f^{-1} \circ g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Kompozicija funkcija: primeri

Neka je $A = \{1, 2, 3\}$ i $f, g : A \rightarrow A$ zadate sa $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ i $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Odrediti (ako je moguće): f^{-1} , g^{-1} , $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $(g \circ f)^{-1}$ i $f^{-1} \circ g^{-1}$.

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(g \circ f)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f^{-1} \circ g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Kompozicija funkcija: primeri

Neka je $A = \{1, 2, 3\}$ i $f, g : A \rightarrow A$ zadate sa $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ i $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Odrediti (ako je moguće): f^{-1} , g^{-1} , $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $(g \circ f)^{-1}$ i $f^{-1} \circ g^{-1}$.

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(g \circ f)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f^{-1} \circ g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Kompozicija funkcija: primeri

Neka je $A = \{1, 2, 3\}$ i $f, g : A \rightarrow A$ zadate sa $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ i $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Odrediti (ako je moguće): f^{-1} , g^{-1} , $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $(g \circ f)^{-1}$ i $f^{-1} \circ g^{-1}$.

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(g \circ f)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f^{-1} \circ g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Kompozicija funkcija: primeri

Neka je $A = \{1, 2, 3\}$ i $f, g : A \rightarrow A$ zadate sa $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ i $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Odrediti (ako je moguće): f^{-1} , g^{-1} , $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $(g \circ f)^{-1}$ i $f^{-1} \circ g^{-1}$.

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(g \circ f)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f^{-1} \circ g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Kompozicija funkcija: primeri

Neka je $A = \{1, 2, 3\}$ i $f, g : A \rightarrow A$ zadate sa $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ i $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Odrediti (ako je moguće): f^{-1} , g^{-1} , $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $(g \circ f)^{-1}$ i $f^{-1} \circ g^{-1}$.

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(g \circ f)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}$$

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f^{-1} \circ g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}$$

$$f \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Kompozicija funkcija: primeri

Neka je $A = \{1, 2, 3\}$ i $f, g : A \rightarrow A$ zadate sa $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ i $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Odrediti (ako je moguće): f^{-1} , g^{-1} , $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $(g \circ f)^{-1}$ i $f^{-1} \circ g^{-1}$.

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(g \circ f)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f^{-1} \circ g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}$$

$$f \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Kompozicija funkcija: primeri

Neka je $A = \{1, 2, 3\}$ i $f, g : A \rightarrow A$ zadate sa $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ i $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Odrediti (ako je moguće): f^{-1} , g^{-1} , $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $(g \circ f)^{-1}$ i $f^{-1} \circ g^{-1}$.

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (g \circ f)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad f^{-1} \circ g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Napomena

Generalno, $f \circ g \neq g \circ f$, tj. ne važi komutativnost kompozicije.

Identička, inverzna funkcija i kompozicija

Definicija (Identička funkcija)

Neka je $A \neq \emptyset$. Funkcija $i_d : A \rightarrow A$ definisana sa $(\forall x \in A) i_d(x) = x$, se naziva *identička funkcija skupa A*. Primetimo da je i_d bijekcija i da je $f \circ i_d = i_d \circ f = f$.

Lema

Neka je $A \neq \emptyset$, $f, g : A \xrightarrow[na]{1-1} A$ i i_d identička funkcija skupa A . Tada važi $f \circ g = i_d$ akko $g = f^{-1}$ (i takođe $f = g^{-1}$).

Dokaz

Imamo $g = f^{-1}$ akko $(\forall x \in A)$ iz $f(x) = y$ sledi $g(y) = x$. Kako su f i g bijekcije, ovo je ekvivalentno sa $(\forall y \in A)(f \circ g)(y) = y$.

Lema

Neka je $A \neq \emptyset$, $f, g : A \xrightarrow[na]{1-1} A$ i i_d identička funkcija skupa A . Tada je

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

Identička, inverzna funkcija i kompozicija

Definicija (Identička funkcija)

Neka je $A \neq \emptyset$. Funkcija $i_d : A \rightarrow A$ definisana sa $(\forall x \in A) i_d(x) = x$, se naziva *identička funkcija skupa A*. Primetimo da je i_d bijekcija i da je $f \circ i_d = i_d \circ f = f$.

Lema

Neka je $A \neq \emptyset$, $f, g : A \xrightarrow[na]{1-1} A$ i i_d identička funkcija skupa A . Tada važi $f \circ g = i_d$ akko $g = f^{-1}$ (i takođe $f = g^{-1}$).

Lema

Neka je $A \neq \emptyset$, $f, g : A \xrightarrow[na]{1-1} A$ i i_d identička funkcija skupa A . Tada je

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

Dokaz

$$(f \circ g) \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) = f \circ (g \circ g^{-1}) \circ f^{-1} = f \circ i_d \circ f^{-1} = f \circ f^{-1} = i_d$$

Šta smo danas radili

- Funkcije i funkcije skupa A u skup B
- Injektivnost i surjektivnost
- Bijekcija
- Inverzna funkcija
- Kompozicija funkcija