Algebra

Ivan Prokić

Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad

Predavanje 5

Na prethodnom času

- Skup slika i kompozicija
- Prebrajanje funkcija
    - Proizvoljne
    - Injektivne
    - Bijektivne
    - Sirjektivne
    - Rastuće
    - Neopadajuće

Bulove algebre

Skupovi

Neka je $A \neq \emptyset$. Posmatrajmo $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, ^{-}, \emptyset, A)$, gde je $\mathcal{P}(A)$ partitivni skup od A, operacije $\cup$ i $\cap$ predstavljaju uniju i presek skupova, a $^{-}$ je komplement ($\overline{X} = A \backslash X$):

B_1 **Komutativnost:** Za sve $X, Y \in \mathcal{P}(A)$ važi

$$X \cup Y = Y \cup X \quad \text{i} \quad X \cap Y = Y \cap X$$

B_2 **Distributivnost:** Za sve $X, Y, Z \in \mathcal{P}(A)$ važi

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z) \quad \text{i} \quad X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$$

B_3 **Neutralni elementi:** Za svako $X \in \mathcal{P}(A)$ važi

$$X \cup \emptyset = X \quad \text{i} \quad X \cap A = X$$

B_4 **Komplementarnost:** Za svako $X \in \mathcal{P}(A)$ važi

$$X \cup \overline{X} = A \quad \text{i} \quad X \cap \overline{X} = \emptyset$$

Iskazni račun

Posmatrajmo $(\{\top, \bot\}, \vee, \wedge, \neg, \bot, \top)$, gde operacije $\vee$ i $\wedge$ predstavljaju disjunkciju i konjukciju, a $\neg$ je negacija:

B_1 **Komutativnost:** Za sve $p, q \in \{\top, \bot\}$ važi

$$p \vee q = q \vee p \quad \text{i} \quad p \wedge q = q \wedge p$$

B_2 **Distributivnost:** Za sve $p, q, r \in \{\top, \bot\}$ važi

$$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \quad \text{i} \quad p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

B_3 **Neutralni elementi:** Za svako $p \in \{\top, \bot\}$ važi

$$p \vee \bot = p \quad \text{i} \quad p \wedge \top = p$$

B_4 **Komplementarnost:** Za svako $p \in \{\top, \bot\}$ važi

$$p \vee \neg p = \top \quad \text{i} \quad p \wedge \neg p = \bot$$

Delioci broja 30

Posmatrajmo $\left(D_{30}, NZS, NZD, x' = \frac{30}{x}, 1, 30\right)$, gde je $D_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ skup delioca broja 30, NZS i NZD najmanji zajednički sadržalac i najveći zajednički delilac:

B_1 **Komutativnost:** Za sve $x, y \in D_{30}$ važi

$$NZS\{x, y\} = NZS\{y, x\} \quad \text{i} \quad NZD\{x, y\} = NZD\{y, x\}$$

B_2 **Distributivnost:** Za sve $x, y, z \in D_{30}$ važi

$$NZD\{x, NZS\{y, z\}\} = NZS\{NZD\{x, y\}, NZD\{x, z\}\} \quad \text{i}$$

$$NZS\{x, NZD\{y, z\}\} = NZD\{NZS\{x, y\}, NZS\{x, z\}\}$$

B_3 **Neutralni elementi:** Za svako $x \in D_{30}$ važi

$$NZS\{x, 1\} = x \quad \text{i} \quad NZD\{x, 30\} = x$$

B_4 **Komplementarnost:** Za svako $x \in D_{30}$ važi

$$NZS\{x, x'\} = 30 \quad \text{i} \quad NZD\{x, x'\} = 1$$

Apstrakcija: Bulove algebre

Definicija: Uređena šestorka $\mathcal{B} = \big(B, +, \cdot, ', 0, 1\big)$, gde je $B \neq \emptyset$, $+ : B^2 \to B$, $\cdot : B^2 \to B$, $' : B \to B$ i $0, 1 \in B$. Kažemo da je $\mathcal{B}$ **Bulova algebra** ako važe aksiome:

B_1 **Komutativnost:** Za sve $a, b \in B$ važi

$$a + b = b + a \quad \text{i} \quad a \cdot b = b \cdot a$$

B_2 **Distributivnost:** Za sve $a, b, c \in B$ važi

$$a \cdot \big(b + c\big) = \big(a \cdot b\big) + \big(a \cdot c\big) \quad \text{i} \quad a + \big(b \cdot c\big) = \big(a + b\big) \cdot \big(a + c\big)$$

B_3 **Neutralni elementi:** Za svako $a \in B$ važi

$$a + 0 = a \quad \text{i} \quad a \cdot 1 = a$$

B_4 **Komplementarnost:** Za svako $a \in B$ važi

$$a + a' = 1 \quad \text{i} \quad a \cdot a' = 0$$

Dualnost

Napomena

Primetimo da se aksiome pojavljuju u paru i da ako u jednoj aksiomi zamenimo mesta simbolima $+$ i $\cdot$, i simbolima 0 i 1 onda ponovo dobijamo aksiomu Bulove algebre.

Posledica

Sledi da će i skup teorema Bulove algebre biti dualan: kad god dokazemo neko tvrđenje u Bulovim algebrama možemo u tvrđenju izvršiti prethodno opisanu zamenu simbola i dobiti da važi njemu dualno tvrđenje.

Osnovne teoreme Bulovih algebri

Idempotentnost

Teorema (Idempotentnost)

U svakoj Bulovoj algebri $\mathcal{B} = \left(B, +, \cdot, ', 0, 1\right)$, *za sve* $a \in B$ *važi*

$$a + a = a \quad i \quad a \cdot a = a$$

Dokaz

Dokazaćemo samo prvu jednakost, druga će onda slediti iz dualnosti. Imamo sledeće izvođenje

$$\begin{aligned}
a &= a + 0 && \text{(iz aksiome neutralni elementi)}\\
&= a + (a \cdot a') && \text{(iz aksiome komplementarnost)}\\
&= (a + a) \cdot (a + a') && \text{(iz aksiome distributivnost)}\\
&= (a + a) \cdot 1 && \text{(iz aksiome komplementarnost)}\\
&= a + a && \text{(iz aksiome neutralni elementi)}
\end{aligned}$$

Idempotentnost

Teorema (Idempotentnost)

U svakoj Bulovoj algebri $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$, *za sve* $a \in B$ *važi*

$$a + a = a \quad i \quad a \cdot a = a$$

Napomena

U algebri skupova $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, ^{-}, \emptyset, A)$, *idempotentnost kaže da za sve* $X \subseteq A$ *važi*

$$X \cup X = X \quad i \quad X \cap X = X$$

Ograničenost

Teorema (Ograničenost)

U svakoj Bulovoj algebri $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$, *za sve* $a \in B$ *važi*

$$a + 1 = 1 \quad i \quad a \cdot 0 = 0$$

Dokaz

Dokazaćemo samo jednu jednakost, druga će onda slediti iz dualnosti. Imamo sledeće izvođenje

$$\begin{aligned} a + 1 &= (a + 1) \cdot 1 && \textit{(aksioma neutralni elementi)} \\ &= (a + 1) \cdot (a + a') && \textit{(aksioma komplementarnost)} \\ &= a + (1 \cdot a') && \textit{(aksioma distributivnost)} \\ &= a + a' && \textit{(aksioma neutralni elementi (i komut.))} \\ &= 1 && \textit{(aksioma komplementarnost)} \end{aligned}$$

Ograničenost

Teorema (Ograničenost)

U svakoj Bulovoj algebri $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$, *za sve* $a \in B$ *važi*

$$a + 1 = 1 \quad i \quad a \cdot 0 = 0$$

Napomena

U algebri skupova $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, ^{-}, \emptyset, A)$, *ograničenost kaže da za sve* $X \subseteq A$ *važi*

$$X \cup A = A \quad i \quad X \cap \emptyset = \emptyset$$

Apsorpcija

Teorema (Apsorpcija)

U svakoj Bulovoj algebri $\mathcal{B} = \big(B, +, \cdot, ', 0, 1\big)$, *za sve* $a, b \in B$ *važi*

$$a + ab = a \quad i \quad a \cdot (a + b) = a$$

Dokaz

Dokazaćemo samo jednu jednakost, druga će onda slediti iz dualnosti. Imamo sledeće izvođenje

$$\begin{aligned} a + ab &= a \cdot 1 + ab && \textit{(aksioma neutralni elementi)} \\ &= a \cdot (1 + b) && \textit{(aksioma distributivnost)} \\ &= a \cdot 1 && \textit{(teorema ograničenost (i komut.))} \\ &= a && \textit{(aksioma neutralni elementi)} \end{aligned}$$

Apsorpcija

Teorema (Apsorpcija)

U svakoj Bulovoj algebri $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$, za sve $a, b \in B$ važi

$$a + ab = a \quad i \quad a \cdot (a + b) = a$$

Napomena

U algebri skupova $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, ^{-}, \emptyset, A)$, apsorpcija kaže da za sve $X, Y \subseteq A$ važi

$$X \cup (X \cap Y) = X \quad i \quad X \cap (X \cup Y) = X$$

Pomoćna teorema

Lema (Pomoćna)

U svakoj Bulovoj algebri $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$, *za sve* $a, b \in B$ *važi*

$$a + a'b = a + b \quad i \quad a \cdot (a' + b) = a \cdot b$$

Dokaz

Dokazaćemo samo jednu jednakost, druga će onda slediti iz dualnosti. Imamo sledeće izvođenje

$$\begin{aligned} a + a'b &= (a + a') \cdot (a + b) && \textit{(aksioma distributivnost)} \\ &= 1 \cdot (a + b) && \textit{(aksioma komplementarnost)} \\ &= a + b && \textit{(aksioma neutralni elelmenti (i komut.))} \end{aligned}$$

Lema (Pomoćna 2)

U svakoj Bulovoj algebri $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$, *za sve* $a, b \in B$ *važi*

$$a' + ab = a' + b \quad i \quad a' \cdot (a + b) = a' \cdot b$$

Asocijativnost

Teorema (Asocijativnost)

U svakoj Bulovoj algebri $\mathcal{B} = \left(B, +, \cdot, ', 0, 1\right)$, *za sve* $a, b, c \in B$ *važi*

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad i \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Dokaz

Dokazaćemo samo jednu jednakost, druga će onda slediti iz dualnosti. Imamo sledeće izvođenje

$$\begin{aligned}
(a + b) + c &= 1 \cdot ((a + b) + c) && \textit{(neutralni elementi (i komut.))}\\
&= (a + a') \cdot ((a + b) + c) && \textit{(komplementarnost)}\\
&= \left(a(a + b) + ac\right) + \left(a'(a + b) + a'c\right) && \textit{(distributivnost)}\\
&= \left(a + ac\right) + \left(a'b + a'c\right) && \textit{(apsorpcija i pomoćna 2)}\\
&= a + a'(b + c) && \textit{(apsorpcija i distributivnost)}\\
&= a + (b + c) && \textit{(pomoćna)}
\end{aligned}$$

Asocijativnost

Teorema (Asocijativnost)

U svakoj Bulovoj algebri $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$*, za sve* $a, b, c \in B$ *važi*

$$(a+b)+c = a+(b+c) \quad i \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Napomena

U algebri skupova $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, {}^{-}, \emptyset, A)$*, asocijativnost kaže da za sve* $X, Y, Z \subseteq A$ *važi*

$$(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z) \quad i \quad (X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$$

Jedinstvenost komplementa

Teorema (Jedinstvenost komplementa)

U svakoj Bulovoj algebri $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ sistem jednačina $a + x = 1 \ \wedge \ a \cdot x = 0$ ima jedinstveno rešenje za sve vrednosti parametra $a \in B$ i to rešenje je $x = a'$.

Dokaz

Pošto se traži jedinstveno rešenje sistema mi ćemo pokazati da

1. **Postoji bar jedno rešenje:** *Na osnovu aksiome komplementarnosti, jedno rešenje je $x = a'$.*
2. **Nema više od jednog rešenja:** *Dokaz izvodimo svođenjem na kontradikciju. Pretpostavimo da postoji bar još jedno rešenje sistema b, takvo da je $b \neq a'$. Sada imamo*

$$b = b \cdot 1 = b \cdot (a + a') = ba + ba' = 0 + ba' = aa' + ba' = (a + b)a' = 1 \cdot a' = a'$$

Dobili smo kontradikciju pa zaključujemo da sistem ne može imati više od jednog rešenja.

Jedinstvenost komplementa

Teorema (Jedinstvenost komplementa)

U svakoj Bulovoj algebri $\mathcal{B} = \left(B, +, \cdot, ', 0, 1\right)$ *sistem jednačina* $a + x = 1 \ \wedge \ a \cdot x = 0$ *ima jedinstveno rešenje za sve vrednosti parametra* $a \in B$ *i to rešenje je* $x = a'$.

Napomena

U algebri skupova $\left(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, ^{-}, \emptyset, A\right)$, *jedinstvenost komplementa kaže da za sve* $C \subseteq A$ *važi*

$$(C \cup X = A \quad i \quad C \cap X = \emptyset) \quad \Rightarrow \quad X = \overline{C}$$

Komplementi od 0 i 1

Teorema (Komplementi od 0 i 1)

U svakoj Bulovoj algebri $\mathcal{B} = \left(B, +, \cdot, ', 0, 1\right)$ *važi*

$$0' = 1 \quad i \quad 1' = 0$$

Dokaz

Dokazaćemo samo jednu jednakost, druga će onda slediti iz dualnosti. Posmatrajmo sistem jednačina $0 + x = 1 \ \wedge \ 0 \cdot x = 0$*. Po aksiomi komplementarnost, rešenje sistema je* $x = 0'$*, a po teoremi ograničenost, rešenje sitema je i* $x = 1$*. Iz teoreme jedinstvenost komplementa dobijamo* $0' = 1$*.*

Komplementi od 0 i 1

Teorema (Komplementi od 0 i 1)

U svakoj Bulovoj algebri $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ *važi*

$$0' = 1 \quad i \quad 1' = 0$$

Napomena

U algebri skupova $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, ^{-}, \emptyset, A)$, *ovo znači*

$$\overline{\emptyset} = A \quad i \quad \overline{A} = \emptyset$$

Involucija

Teorema (Involucija)

U svakoj Bulovoj algebri $\mathcal{B} = \big(B, +, \cdot, ', 0, 1\big)$, *za sve* $a \in B$ *važi* $(a')' = a$. *Takođe, funkcija* $f : B \to B$ *definisana sa* $f(x) = x'$ *je bijekcija.*

Dokaz

Posmatrajmo sistem jednačina $a' + x = 1 \;\wedge\; a' \cdot x = 0$. *Po aksiomi komplementarnost (i komut.), rešenje sistema je* $x = a$ *i* $x = (a')'$. *Iz teoreme jedinstvenost komplementa dobijamo* $(a')' = a$.

Involucija

Teorema (Involucija)

U svakoj Bulovoj algebri $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$, *za sve* $a \in B$ *važi* $(a')' = a$. *Takođe, funkcija* $f : B \to B$ *definisana sa* $f(x) = x'$ *je bijekcija.*

Napomena

U algebri skupova $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, \overline{}, \emptyset, A)$, *ovo znači da za sve* $X \subseteq A$ *važi*

$$\overline{\overline{A}} = A$$

Demorganovi zakoni

Teorema (Demorganovi zakoni)

U svakoj Bulovoj algebri $\mathcal{B} = \big(B, +, \cdot, ', 0, 1\big)$, *za sve* $a, b \in B$ *važi*

$$(a+b)' = a'b' \quad i \quad (ab)' = a' + b'$$

Dokaz

Dokazaćemo samo jednu jednakost, druga će onda slediti iz dualnosti. Posmatrajmo sistem jednačina $(a+b)+x=1 \ \wedge \ (a+b)\cdot x = 0$. *Po aksiomi komplementarnost, rešenje sistema je* $x=(a+b)'$. *Sa druge strane, imamo da je i* $x = a'b'$ *rešenje sistema:*

$$(a+b)+a'b' = (a+b+a')(a+b+b') = 1\cdot 1 = 1 \quad i \quad (a+b)\cdot a'b' = aa'b'+ba'b' = 0+0 = 0$$

Iz teoreme jedinstvenost komplementa dobijamo $(a+b)' = a'b'$.

Demorganovi zakoni

Teorema (Demorganovi zakoni)

U svakoj Bulovoj algebri $\mathcal{B} = \big(B, +, \cdot,', 0, 1\big)$, *za sve* $a, b \in B$ *važi*

$$(a+b)' = a'b' \quad i \quad (ab)' = a' + b'$$

Napomena

U algebri skupova $\big(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, ^{-}, \emptyset, A\big)$, *ovo znači da za sve* $X, Y \subseteq A$ *važi*

$$\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y} \quad i \quad \overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$$

Podalgebre

Podalgebre i kako ih naći

Definicija (Podalgebre)

Neka je $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ *Bulova algebra. Kažemo da je Bulova algebra* $\mathcal{C} = (C, +, \cdot, ', 0, 1)$ *podalgebra Bulove algebre* $\mathcal{B}$ *ako je* $C \subseteq B$ *i operacije iz* $\mathcal{C}$ *su restrikcije operacija iz* $\mathcal{B}$*.*

Podalgebre i kako ih naći

Definicija (Podalgebre)

Neka je $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ *Bulova algebra. Kažemo da je Bulova algebra* $\mathcal{C} = (C, +, \cdot, ', 0, 1)$ *podalgebra Bulove algebre* $\mathcal{B}$ *ako je* $C \subseteq B$ *i operacije iz* $\mathcal{C}$ *su restrikcije operacija iz* $\mathcal{B}$.

Teorema

Neka je $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ *Bulova algebra i* $C \subseteq B$. *Tada je* $\mathcal{C} = (C, +, \cdot, ', 0, 1)$, *gde su* $+, \cdot, '$ *restrikcije operacija iz* $\mathcal{B}$, *podalgebra algebre* $\mathcal{B}$ *ako i samo ako za sve* $a, b \in C$ *važi* $a + b \in C$, $a \cdot b \in C$ *i* $a' \in C$.

Dokaz

($\Rightarrow$): *Ako je* $\mathcal{C}$ *podalgebra od* $\mathcal{B}$, *onda su operacije u* $\mathcal{C}$ *restrikcije operacija iz* $\mathcal{B}$.

($\Leftarrow$): *Pošto sve aksiome Bulovih algebri važe u* $\mathcal{B}$, *onda važe u* $\mathcal{C}$ *(jer su operacije iz* $\mathcal{C}$ *restrikcije operacija iz* $\mathcal{B}$*), pod uslovom da* 0 *i* 1 *iz* B *pripadaju i* C. *Ovo sledi iz: ako* $a \in C$ *onda i* $a' \in C$, *pa i* $a + a' \in C$ *i* $a + a' \in C$, *tj.* $1 \in C$ *i* $0 \in C$.

Primeri podalgebri

Naći sve podalgebre Bulovih algebri:

$\big(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, ^{-}, \emptyset, A\big)$, za $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\}$

$\big(D_{30}, NZS, NZD, x' = \frac{30}{x}, 1, 30\big)$, gde je $D_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$

- $\mathcal{B}_1 = \big(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, ^{-}, \emptyset, A\big)$
- $\mathcal{B}_2 = \big(\{\emptyset, A\}, \cup, \cap, ^{-}, \emptyset, A\big)$

Primeri podalgebri

Naći sve podalgebre Bulovih algebri:

$(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, ^-, \emptyset, A)$, za $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, A\}$

$(D_{30}, NZS, NZD, x' = \frac{30}{x}, 1, 30)$, gde je $D_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$

- $\mathcal{B}_1 = (\mathcal{P}(A), \cup, \cap, ^-, \emptyset, A)$
- $\mathcal{B}_2 = (\{\emptyset, A\}, \cup, \cap, ^-, \emptyset, A)$
- $\mathcal{B}_3 = (\{\emptyset, A, \{a\}, \{b,c\}\}, \cup, \cap, ^-, \emptyset, A)$
- $\mathcal{B}_4 = (\{\emptyset, A, \{b\}, \{a,c\}\}, \cup, \cap, ^-, \emptyset, A)$
- $\mathcal{B}_5 = (\{\emptyset, A, \{c\}, \{a,b\}\}, \cup, \cap, ^-, \emptyset, A)$

Primeri podalgebri

Naći sve podalgebre Bulovih algebri:

$\left(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, ^{-}, \emptyset, A\right)$, za $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, A\}$

- $\mathcal{B}_1 = \left(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, ^{-}, \emptyset, A\right)$
- $\mathcal{B}_2 = \left(\{\emptyset, A\}, \cup, \cap, ^{-}, \emptyset, A\right)$
- $\mathcal{B}_3 = \left(\{\emptyset, A, \{a\}, \{b,c\}\}, \cup, \cap, ^{-}, \emptyset, A\right)$
- $\mathcal{B}_4 = \left(\{\emptyset, A, \{b\}, \{a,c\}\}, \cup, \cap, ^{-}, \emptyset, A\right)$
- $\mathcal{B}_5 = \left(\{\emptyset, A, \{c\}, \{a,b\}\}, \cup, \cap, ^{-}, \emptyset, A\right)$

$\left(D_{30}, NZS, NZD, x' = \frac{30}{x}, 1, 30\right)$, gde je $D_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$

- $\mathcal{C}_1 = \left(D_{30}, NZS, NZD, x' = \frac{30}{x}, 1, 30\right)$
- $\mathcal{C}_2 = \left(\{1, 30\}, NZS, NZD, x' = \frac{30}{x}, 1, 30\right)$

Primeri podalgebri

Naći sve podalgebre Bulovih algebri:

$(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, ^{-}, \emptyset, A)$, za $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, A\}$

- $\mathcal{B}_1 = (\mathcal{P}(A), \cup, \cap, ^{-}, \emptyset, A)$
- $\mathcal{B}_2 = (\{\emptyset, A\}, \cup, \cap, ^{-}, \emptyset, A)$
- $\mathcal{B}_3 = (\{\emptyset, A, \{a\}, \{b,c\}\}, \cup, \cap, ^{-}, \emptyset, A)$
- $\mathcal{B}_4 = (\{\emptyset, A, \{b\}, \{a,c\}\}, \cup, \cap, ^{-}, \emptyset, A)$
- $\mathcal{B}_5 = (\{\emptyset, A, \{c\}, \{a,b\}\}, \cup, \cap, ^{-}, \emptyset, A)$

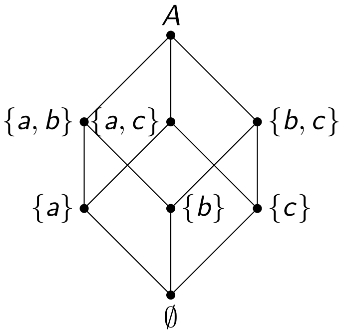
$(D_{30}, NZS, NZD, x' = \frac{30}{x}, 1, 30)$, gde je $D_{30} = \{1,2,3,5,6,10,15,30\}$

- $\mathcal{C}_1 = (D_{30}, NZS, NZD, x' = \frac{30}{x}, 1, 30)$
- $\mathcal{C}_2 = (\{1, 30\}, NZS, NZD, x' = \frac{30}{x}, 1, 30)$
- $\mathcal{C}_3 = (\{1, 30, 2, 15\}, NZS, NZD, x' = \frac{30}{x}, 1, 30)$
- $\mathcal{C}_4 = (\{1, 30, 3, 10\}, NZS, NZD, x' = \frac{30}{x}, 1, 30)$
- $\mathcal{C}_5 = (\{1, 30, 5, 6\}, NZS, NZD, x' = \frac{30}{x}, 1, 30)$

Relacija poretka na Bulovim algebrama

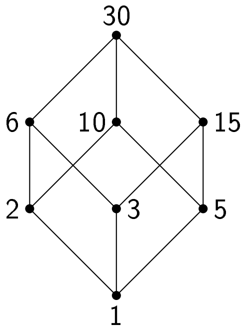
Neke relacije poretka

- Skupovi: $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$, za $A = \{1, 2, 3\}$



Imamo: $X \subseteq Y \;\Leftrightarrow\; X \cup Y = Y$

- Delioci broja 30: $(D_{30}, \,|\,)$



Imamo: $k \,|\, l \;\Leftrightarrow\; NZS\{k, l\} = l$

Apstrakcija: relacija poretka na Bulovim algebrama

Definicija

Neka je $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ *Bulova algebra. Definišemo relaciju* $\preccurlyeq$ *tako da za sve* $a, b \in B$ *važi*

$$a \preccurlyeq b \quad \Leftrightarrow \quad a + b = b$$

Apstrakcija: relacija poretka na Bulovim algebrama

Definicija

Neka je $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ Bulova algebra. Definišemo relaciju $\preccurlyeq$ tako da za sve $a, b \in B$ važi

$$a \preccurlyeq b \quad \Leftrightarrow \quad a + b = b$$

Teorema

Neka je $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ Bulova algebra. Tada je $\preccurlyeq$ relacija poretka na $\mathcal{B}$.

Dokaz

(R) $(\forall a \in B)\ a \preccurlyeq a$

(A) $(\forall a, b \in B)\ (a \preccurlyeq b \ \wedge \ b \preccurlyeq a) \ \Rightarrow a = b$

(T) $(\forall a, b, c \in B)\ (a \preccurlyeq b \ \wedge \ b \preccurlyeq c) \ \Rightarrow a \preccurlyeq c$

Apstrakcija: relacija poretka na Bulovim algebrama

Definicija

Neka je $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ *Bulova algebra. Definišemo relaciju* $\preccurlyeq$ *tako da za sve* $a, b \in B$ *važi*

$$a \preccurlyeq b \quad \Leftrightarrow \quad a + b = b$$

Teorema

Neka je $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ *Bulova algebra. Tada je* $\preccurlyeq$ *relacija poretka na* $\mathcal{B}$.

Dokaz

(R) $(\forall a \in B)\ a \preccurlyeq a \ \Leftrightarrow\ a + a = a$ *(iz idempotentnosti)*

(A) $(\forall a, b \in B)\ (a \preccurlyeq b \wedge b \preccurlyeq a) \Rightarrow a = b$

(T) $(\forall a, b, c \in B)\ (a \preccurlyeq b \wedge b \preccurlyeq c) \Rightarrow a \preccurlyeq c$

Apstrakcija: relacija poretka na Bulovim algebrama

Definicija

Neka je $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ *Bulova algebra. Definišemo relaciju* $\preccurlyeq$ *tako da za sve* $a, b \in B$ *važi*

$$a \preccurlyeq b \quad \Leftrightarrow \quad a + b = b$$

Teorema

Neka je $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ *Bulova algebra. Tada je* $\preccurlyeq$ *relacija poretka na* $\mathcal{B}$.

Dokaz

(R) $(\forall a \in B)\ a \preccurlyeq a \ \Leftrightarrow\ a + a = a$ *(iz idempotentnosti)*

(A) $(\forall a, b \in B)\ (a \preccurlyeq b \wedge b \preccurlyeq a) \Rightarrow a = b$

$(a \preccurlyeq b \wedge b \preccurlyeq a) \Leftrightarrow (a + b = b \wedge b + a = a) \Rightarrow a = b$ *(iz komutativnosti)*

(T) $(\forall a, b, c \in B)\ (a \preccurlyeq b \wedge b \preccurlyeq c) \Rightarrow a \preccurlyeq c$

Apstrakcija: relacija poretka na Bulovim algebrama

Definicija

Neka je $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ *Bulova algebra. Definišemo relaciju* $\preccurlyeq$ *tako da za sve* $a, b \in B$ *važi*

$$a \preccurlyeq b \quad \Leftrightarrow \quad a + b = b$$

Teorema

Neka je $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ *Bulova algebra. Tada je* $\preccurlyeq$ *relacija poretka na* $\mathcal{B}$.

Dokaz

(R) $(\forall a \in B)\ a \preccurlyeq a \ \Leftrightarrow\ a + a = a$ *(iz idempotentnosti)*

(A) $(\forall a, b \in B)\ (a \preccurlyeq b \ \wedge\ b \preccurlyeq a) \ \Rightarrow a = b$

$(a \preccurlyeq b \ \wedge\ b \preccurlyeq a) \ \Leftrightarrow\ (a + b = b \ \wedge\ b + a = a) \ \Rightarrow\ a = b$ *(iz komutativnosti)*

(T) $(\forall a, b, c \in B)\ (a \preccurlyeq b \ \wedge\ b \preccurlyeq c) \ \Rightarrow a \preccurlyeq c$

$(a \preccurlyeq b \ \wedge\ b \preccurlyeq c) \ \Leftrightarrow\ (a + b = b \ \wedge\ b + c = c) \ \Rightarrow$

$a + c = a + (b + c) = (a + b) + c = b + c = c$ *(iz asocijativnosti)*

Neke osobine relacije poretka na Bulovim algebrama

Teorema

Neka je $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ *Bulova algebra. Tada za sve* $a, b, c \in B$ *važi*

1. $(a \preccurlyeq c \ \wedge \ b \preccurlyeq c) \ \Leftrightarrow \ a + b \preccurlyeq c$
2. $(c \preccurlyeq a \ \wedge \ c \preccurlyeq b) \ \Leftrightarrow \ c \preccurlyeq ab$
3. $(a \preccurlyeq c \ \wedge \ b \preccurlyeq c) \ \Rightarrow \ ab \preccurlyeq c$
4. $(c \preccurlyeq a \ \wedge \ c \preccurlyeq b) \ \Rightarrow \ c \preccurlyeq a + b$

Dokaz

1. *Smer* $(\Rightarrow)$: $(a \preccurlyeq c \ \wedge \ b \preccurlyeq c) \ \Rightarrow \ (a + c = c \ \wedge \ b + c = c) \ \Rightarrow \ a + b + c = c$
2. *Ostatak dokaza pogledati u knjizi.*

Ograničenost, ponovo

Teorema

Neka je $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ *Bulova algebra. Tada za sve* $a \in B$ *važi* $0 \preccurlyeq a$ *i* $a \preccurlyeq 1$.

Dokaz

Prvi deo: $0 \preccurlyeq a \;\Leftrightarrow\; 0 + a = a$, *što sledi iz aksiome neutralni elementi.*
Drugi deo: $a \preccurlyeq 1 \;\Leftrightarrow\; a + 1 = 1$, *što sledi iz teoreme ograničenost.*

Napomena

U svakoj Bulovoj algebri 0 *je najmanji, a* 1 *najveći element.*

Teorema

Neka je $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ *Bulova algebra. Tada za sve* $a \in B$ *važi*
$ab = 1 \;\Leftrightarrow\; (a = 1 \wedge b = 1)$

Dokaz

$(\Leftarrow)$: *Direktno.* $(\Rightarrow)$: $ab = 1 \;\Rightarrow\; a + ab = a + 1 \;\Rightarrow\; a = 1$ *(apsorpcija, ograničenost)*

Šta smo danas radili

- Bulove algebre
- Osnovne teoreme Bulove algebre
- Podalgebre
- Relacija poretka