OCENJIVANJE PARAMETARA

Ocenjivanje parametara

- Parametri populacije su numeričke vrednosti koje opisuju određena svojstva posmatranog obeležja
- Najzastupljeniji parametri:
  1. Srednja vrednost populacije (μ)
  2. Varijansa populacije (σ^2)
  3. Proporcija tj. udeo vrednosti obeležja u populaciji (***p***)
- Ovi parametri najčešće nisu poznati i ne mogu se tačno izračunati
- Ocenjivanje parametara obuhvata metode za procenu nepoznate vrednosti parametara populacije, na osnovu odgovarajućih deskriptivnih statistika uzorka.
- Metode ocenjivanja parametara → **tačkasto**, **intervalno**

Tačkaste ocene

Tačkasta ocena je jedna vrednost kojom procenjujemo parametar populacije.

- Metod momenata
- Metod maksimalne verodostojnosti

Na primer, tačkasta ocena za μ je $\overline{x}$.

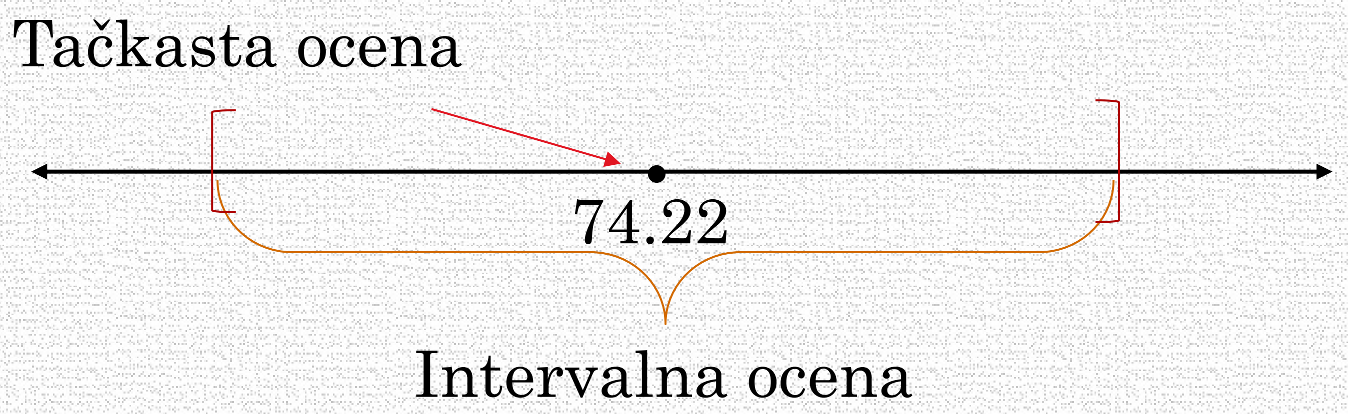
Primer: na osnovu uzorka proceniti srednju vrednost populacije.

$$\left.\begin{array}{cccccccc} 34 & 34 & 38 & 45 & 45 & 45 & 45 & 54 \\ 56 & 65 & 65 & 66 & 67 & 67 & 68 & 74 \\ 79 & 86 & 87 & 87 & 87 & 88 & 90 & 90 \\ 94 & 95 & 96 & 98 & 98 & 101 & 110 & 121 \end{array}\right\} \overline{x} \approx 74.22$$

Nedostatak: ne znamo koliko procenjena vrednost odstupa od prave!

Intervalne ocene

Intervalna ocena je skup vrednosti (interval) koji se koristi za procenu vrednosti parametra populacije.

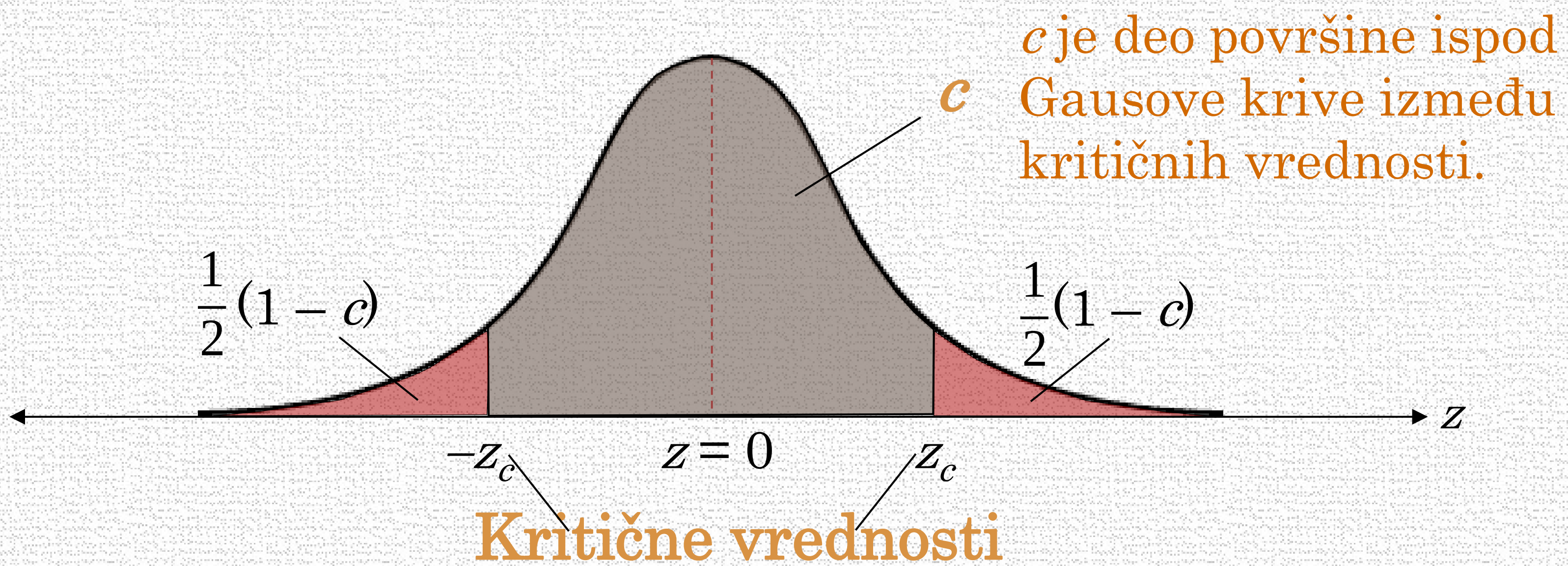


Prednost: znamo verovatnoću da se prava vrednost parametra nalazi u intervalu, i podešavanjem širine intervala je možemo menjati.

Intervali poverenja (CI)

Nivo poverenja

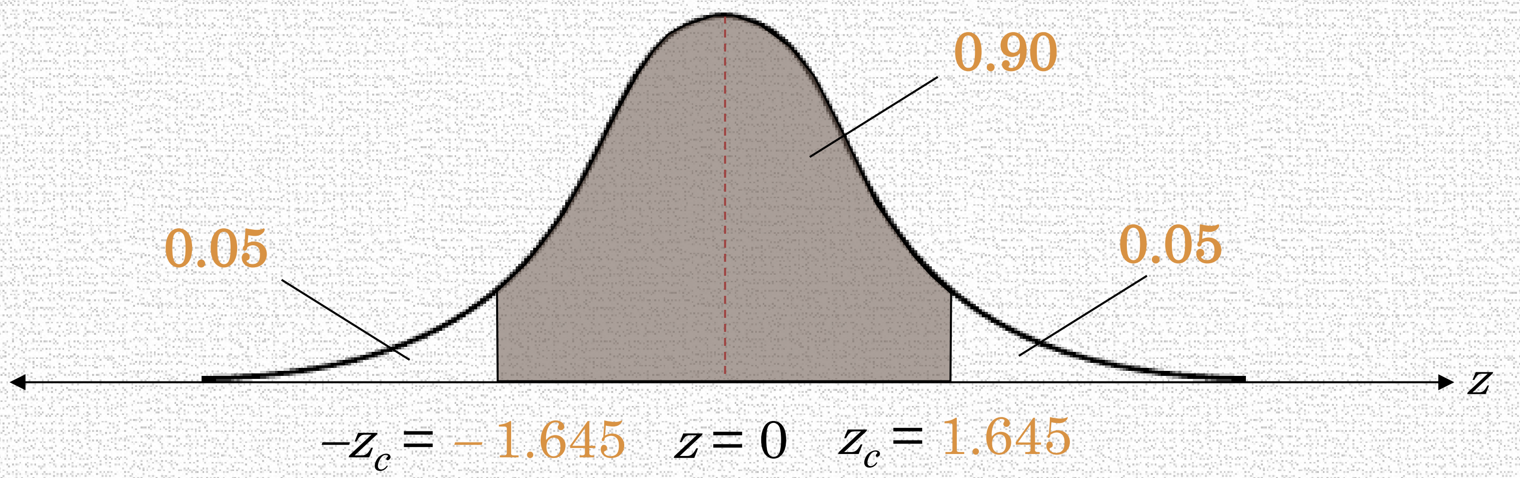
Nivo poverenja c (ili β) je verovatnoća da interval poverenja sadrži parametar populacije.



Preostala površina $(1 - c)$ odgovara verovatnoći da interval ne sadrži parametar.
U tablici Gausove raspodele $z_c = \Phi^{-1}\left(\frac{1+\beta}{2}\right)$

Uobičajeni nivoi poverenja

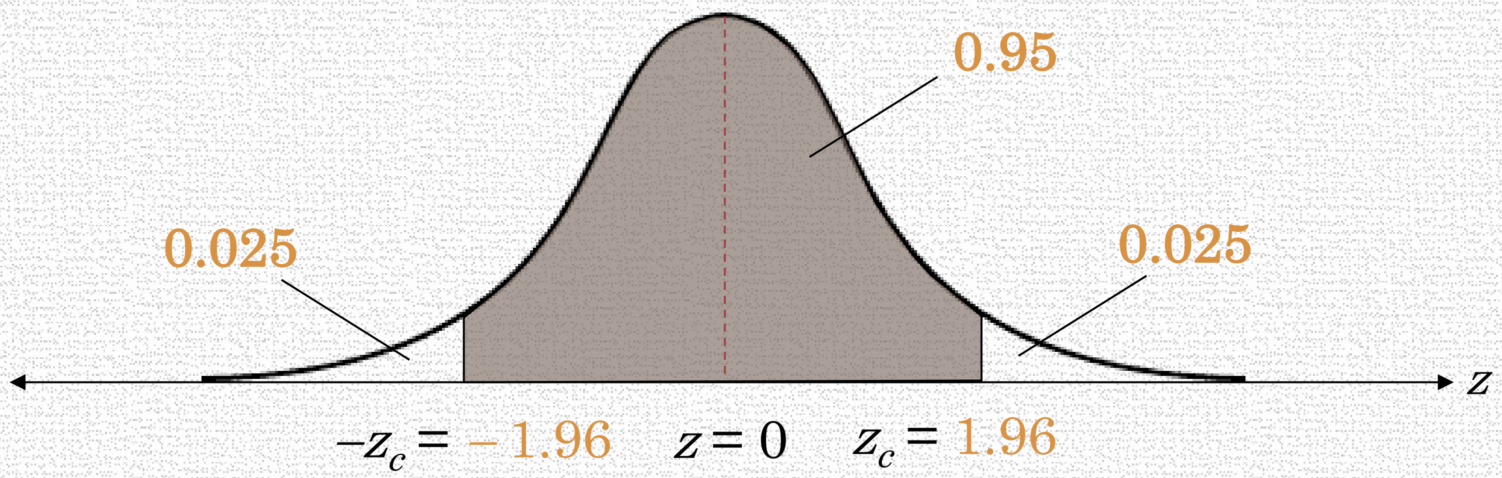
Ukoliko je nivo poverenja 0.9, to znači da smo 90% uvereni da interval sadrži parametar.



Kritične vrednosti z-skora su ± 1.645.

Uobičajeni nivoi poverenja

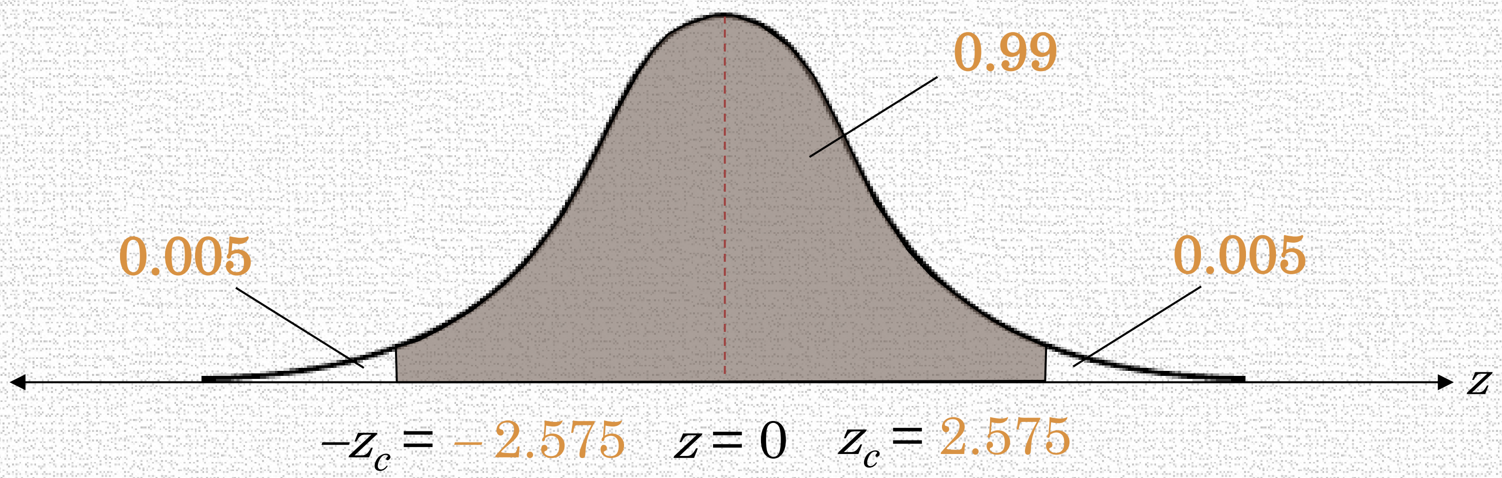
Ukoliko je nivo poverenja 0.95, to znači da smo 95% uvereni da interval sadrži parametar.



Kritične vrednosti z-skora su ± 1.96.

Uobičajeni nivoi poverenja

Ukoliko je nivo poverenja 0.99, to znači da smo 99% uvereni da interval sadrži parametar.



Kritične vrednosti z-skora su ± 2.575.

Veći nivo poverenja → širi CI.

Interval poverenja za μ

***c*-interval poverenja** za srednju vrednost populacije μ je

$$\bar{x} - E < \mu < \bar{x} + E$$

gde je E **margina greške**, tj. najveće dozvoljeno odstupanje između tačkaste ocene i vrednosti parametra.

Margina greške zavisi od obima uzorka (n), varijabilnosti uzorka (σ ili s) i kritične vrednosti koja se za zadati nivo poverenja c (ili β) određuje iz tablice Gausove ili Studentove t-raspodele:

1. U slučaju da je n ≥ 30 ili σ poznato i obeležje u skladu sa normalnom raspodelom → Gausova raspodela
2. U slučaju da je n < 30 i σ nepoznato → Studentova raspodela

Određivanje CI za μ

U slučaju da je $n \geq 30$ ili σ poznato i obeležje u skladu sa normalnom raspodelom

1. Odrediti obim i A.S. uzorka

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

2. Odrediti σ, ako je poznato. Ako nije, odrediti standardnu devijaciju uzorka kao ocenu za nepoznato σ. $\bar{x}$.

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n-1}}$$

3. Odrediti kritične vrednosti z_c koje odgovaraju datom nivou poverenja c.

Koristiti tablicu normalne raspodele.

4. Odrediti marginu greške E.

$$E = z_c \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

5. Odrediti granice intervala, pa konstruisati CI.

$$\bar{x} - E < \mu < \bar{x} + E$$

Primer

Uzorak od 25 USA studenata ima prosečnu ocenu 2.86. Prethodna istraživanja su utvrdila da su ocene normalno raspoređene, i da je standardna devijacija populacije 0.15. Konstruisati 90% CI za srednju vrednost ocene.

$$n = 25 \qquad \bar{x} = 2.86 \qquad \sigma = 0.15$$

$$z_c = 1.645 \qquad E = z_c \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{0.15}{\sqrt{25}} \approx 0.05$$

$$\bar{x} \pm E = 2.86 \pm 0.05 \longrightarrow 2.81 < \mu < 2.91$$

Sa sigurnošću od 90% možemo reći da se prosečna ocena svih studenata nalazi u intervalu od 2.81 do 2.91.

Veličina uzorka

Za dati c-nivo poverenja i datu marginu greške E, minimalni potreban obim uzorka za procenu srednje vrednosti populacije μ je:

$$n = \left(\frac{z_c \sigma}{E} \right)^2 .$$

Ukoliko je σ nepoznato, možemo ga proceniti pomoću standardne devijacije s na osnovu uzorka obima bar 30.

Primer:

Pilot istraživanje cene knjiga u jednoj knjižari je pokazalo da je na uzorku od 32 knjige, AS 74.22\$ i SD 23.44\$. Koliko cena knjiga treba da sadrži uzorak da bi sa sigurnošću od 99% tvrdili da će se prava vrednost parametra razlikovati od AS za najviše 5\$?

- Na osnovu preliminarnog uzorka: $\sigma \approx s = 23.44$
- Za nivo poverenja 0.99: $z_c = 2.575$
- Potreban obim uzorka je:

$$n = \left(\frac{z_c \sigma}{E} \right)^2 = \left(\frac{2.575 \cdot 23.44}{5} \right)^2$$

$$\approx 145.7$$ (uvek zaokružujemo na veći ceo broj!)

Potrebno je uključiti bar 146 knjiga u istraživanje.

Studentova *t*-raspodela

Ukoliko **σ nije poznato i obim uzorka n < 30**, umesto normalne raspodele koristimo njenu modifikaciju:

Studentovu *t*-raspodelu.

Osobine t-raspodele

1. Kriva *t*-raspodele je zvonasto oblika, simetrična oko srednje vrednosti.
2. *t*-raspodelu ne čini jedna, već familija krivih, koje se međusobno razlikuju po parametru koji se zove

   stepen slobode (degrees of freedom – d.f.)

   Kada koristimo Studentovu raspodelu za ocenu srednje vrednosti populacije: d.f. = $n - 1$

Osobine t-raspodele

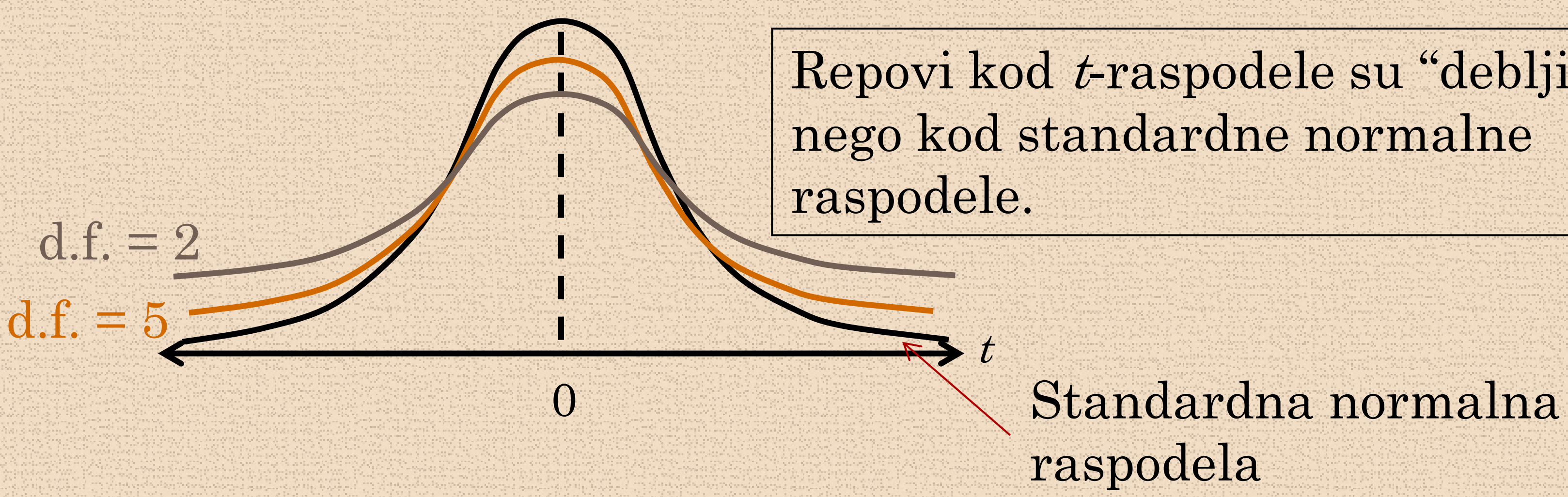
ss

3. Sa povećanjem broja stepeni slobode, *t*-raspodela se sve više približava standardizovanoj normalnoj raspodeli.

Kada je

$$d.f. \geq 30 \ (n > 30)$$

razlike između ovih raspodela su zanemarljivo male.



Repovi kod *t*-raspodele su "deblji" nego kod standardne normalne raspodele.

Normalna ili Studentova raspodela?

U praksi, zbog zanemarljivih razlika između normalne i Studentove raspodele kada je n > 30, koristi se sledeće pojednostavljeno pravilo kod intervala poverenja za srednju vrednost populacije **μ**:

- Kada je **σ** poznato → Normalna raspodela (Z-test)
- Kada **σ** nije poznato → Studentova raspodela (t-test)

Ocenjivanje proporcije populacije *p*

- **Proporcija** ili **udeo** nekog kvalitativnog obeležja (svojstva) u populaciji je verovatnoća da slučajno odabrani element populacije zadovoljava to svojstvo.
- Primer: proporcija plavookih stanovnika neke države; udeo studenata nekog univerziteta sa prosekom većim od 9; procentualna zastupljenost žena koje trpe porodično nasilje,…
- Tačkasta ocena parametra p je tzv. **uzoračka proporcija**

$$\hat{p} = \frac{k}{n}$$

Gde je k broj elemenata na uzorku obima n koji zadovoljavaju dato svojstvo. Koristićemo i oznaku $\hat{q} = 1 - \hat{p}$.

- Proporcija se često iskazuje i u procentualnom obliku (100p%)

Primer

U istraživanju u kome je učestvovalo 1250 odraslih građana RS, 450 je izjavilo da im je omiljeni sport košarka. Odrediti tačkastu ocenu udela odraslih građana Srbije kojima je košarka omiljeni sport.

$$n = 1250 \qquad x = 450$$

$$\hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{450}{1250} = 0.36$$

Ocena proporcije odraslih građana Srbije kojima je košarka omiljeni sport je 0.36, ili 36%.

Kao i kod ocene srednje vrednosti, problem sa tačkastom ocenom je nepoznato odstupanje ocenjene od prave vrednosti.

Interval poverenja za *p*

***c*-interval poverenja** za proporciju populacije p je

$$\hat{p} - E < p < \hat{p} + E$$

gde je margina greške $E = z_c \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$.

- Nivo poverenja c (ili β) predstavlja verovatnoću da interval sadrži pravu vrednost parametra.
- Za zadati nivo poverenja β, kritična vrednost

$$z_c = \Phi^{-1}\left(\frac{1+\beta}{2}\right)$$

- Korišćenje normalne raspodele je opravdano ukoliko su zadovoljeni sledeći uslovi: $n\hat{p} \geq 5, \quad n\hat{q} \geq 5$

Primer:

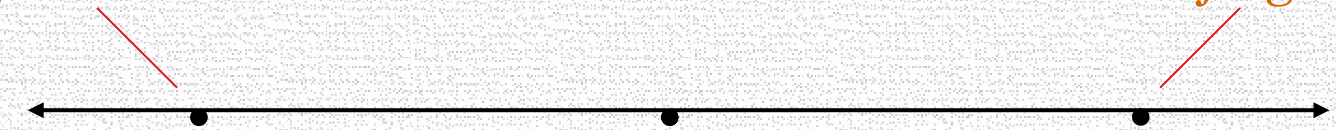
Konstruisati 90% CI za proporciju odraslih građana RS kojima je košarka omiljeni sport, koristeći podatke iz prethodnog primera.

$n = 1250 \qquad x = 450$

$\hat{p} = 0.36 \qquad \hat{q} = 0.64 \qquad E = z_c\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 1.645\sqrt{\frac{(0.36)(0.64)}{1250}} \approx 0.022$

Donja granica = ?

Gornja granica = ?



$\hat{p} = 0.36$

$$\hat{p} - E = 0.36 - 0.022 = 0.338$$

$$\hat{p} + E = 0.36 + 0.022 = 0.382$$

Sa 90% sigurnošću možemo tvrditi da je udeo odraslih građana Srbije kojima je košarka omiljeni sport između 33.8% i 38.2%.

Određivanje CI za *p*

1. Identifikuj obim uzorka n i broj uspeha na uzorku x.
2. Izračunaj uzoračku proporciju $\hat{p}$.
   $$\hat{p} = \frac{x}{n}$$
3. Proveri da li je moguće korišćenje normalne raspodele
   $$n\hat{p} \geq 5, \quad n\hat{q} \geq 5$$
4. Odredi kritičnu vrednost z_c koja odgovara datom nivou poverenja.
   Iz tablice Gausove raspodele.
5. Izračunaj marginu greške E.
   $$E = z_c\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$
6. Odredi granice CI i konstruiši interval
   $$\hat{p} - E < p < \hat{p} + E$$

Veličina uzorka

Za dati nivo poverenja c i za datu marginu greške E, minimalni obim uzorka n potreban za konstruisanje zadovoljavajućeg intervala poverenja za procenu proporcije populacije p je

$$n = \hat{p}\hat{q}\left(\frac{z_c}{E}\right)^2 .$$

Ova formula podrazumeva da postoje tačkaste ocene za $\hat{p}$ i $\hat{q}$. One se mogu dobiti iz probnog uzorka, a ukoliko nisu poznate koriste se ocene $\hat{p} = 0.5$ i $\hat{q} = 0.5$.

Primer:

Želimo da konstruišemo 95% CI za udeo odraslih građana Srbije kojima je omiljeni sport košarka, u kome će odstupanje od prave vrednosti proporcije populacije p biti najviše 2% . Koliki obim uzorka treba uzeti?

- Iz preliminarnog istraživanja: $\hat{p} = 0.36$

$$n = \hat{p}\hat{q}\left(\frac{z_c}{E}\right)^2 = (0.36)(0.64)\left(\frac{1.96}{0.02}\right)^2 \approx 2212.8$$

(Zaokružujemo na gore!)

Da bi dobili CI sa željenom preciznošću i željenim nivoom poverenja, treba nam bar 2213 ispitanika.

Napomena - da nismo imali rezultate preliminarnog istraživanja: $n = 0.5 * 0.5 * (1.96/0.02)^2 \approx 2401$.

Ocenjivanje parametara σ i $σ^2$

- Tačkasta ocena za **varijansu populacije σ^2** je uzoračka disperzija s^2 (a za **standardnu devijaciju populacije σ** je standardna devijacija uzorka s).
- Prilikom konstruisanja intervala poverenja za varijansu i standardnu devijaciju koristimo Pirsonovu *hi-kvadrat raspodelu.*

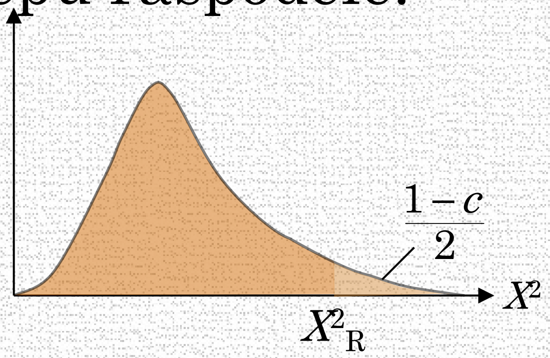
1. Sve vrednosti χ^2 raspodele su ne-negativne.
2. Krive hi-kvadrat raspodele su pozitivno zakrivljene.
3. Hi-kvadrat raspodela predstavlja familiju krivih generisanih različitim vrednostima parametra **d.f.** tj. stepena slobode.

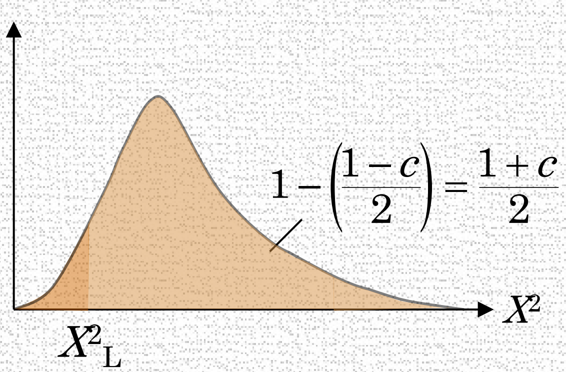
Za konstruisanje CI za parametre σ i $σ^2$ koristimo n-1 stepen slobode.

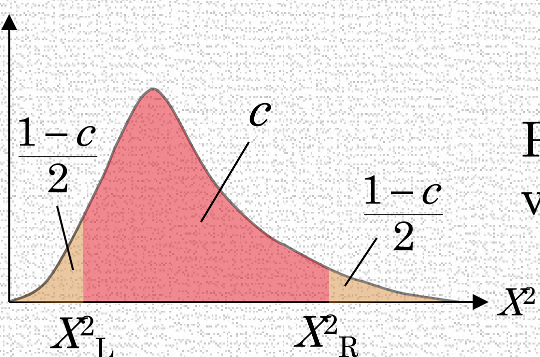
Kritične vrednosti za X^2

Zbog asimetrije (zakrivljenosti), za svaki nivo poverenja c postoje dve kritične vrednosti.

Vrednost χ^2_R odgovara desnom repu, a χ^2_L odgovara levom repu raspodele.







Površina između dve kritične vrednosti je c.

Intervali poverenja za σ^2 i σ

c-intervali poverenja za varijansu i standardnu devijaciju normalno raspoređene populacije:

Interval poverenja za σ^2:

$$\frac{(n-1)s^2}{X_R^2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{X_L^2}$$

Interval poverenja za σ:

$$\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{X_R^2}} < \sigma < \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{X_L^2}}$$

Verovatnoća da intervali sadrže prave vrednosti parametara σ^2 ili σ je c (obično 0.90, 0.95 ili 0.99).

Primer:

Nasumičnim odabirom 41 džaka brašna utvrđena je uzoračka standardna devijacija 0.05 kg. Uz pretpostavku da je težina džakova normalno raspoređena, konstruisati 90% CI za standardnu devijaciju populacije.

d.f. = $n - 1 = 41 - 1 = 40$,

Površina desno od $\chi^2_R = \dfrac{1-c}{2} = \dfrac{1-0.9}{2} = 0.05$

Površina desno od $\chi^2_L = \dfrac{1+c}{2} = \dfrac{1+0.9}{2} = 0.95$

Kritične vrednosti (iz tablice hi-kvadrat raspodele za 40 stepeni slobode) $\chi^2_R = 55.758$ i $\chi^2_L = 26.509$.

Primer (nastavak):

$\chi^2_L = 26.509$

$\chi^2_R = 55.758$

Donja granica= ?

Gornja granica = ?

$$\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_R}} = \sqrt{\frac{(41-1)(0.05)^2}{55.758}} \approx 0.04$$

$$\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_L}} = \sqrt{\frac{(41-1)(0.05)^2}{26.509}} \approx 0.06$$

$$0.04 < \sigma < 0.06$$

Sa sigurnošću od 90% možemo tvrditi da je standardna devijacija težine džakova između 0.04 i 0.06 kg.

TESTIRANJE HIPOTEZA

Statističke hipoteze

- Jedna od najčešćih korišćenih metoda inferencijalne statistike je **testiranje hipoteza**.
- Pod testiranjem hipoteza podrazumevamo proces u kome iznesemo neku **hipotezu** (pretpostavku, tvrdnju) o obeležju koje ispitujemo i onda proveravamo njenu verodostojnost na osnovu realizovanog uzorka.
- Ukoliko se hipoteza odnosi na vrednost nekog parametra populacije (kao što su srednja vrednost, devijacija, proporcija,...) govorimo o **parametarskim hipotezama.**
- Ukoliko se hipoteza odnosi na neko drugo svojstvo obeležja populacije, reč je o **neparametarskim hipotezama.**

Parametarske i neparametarske hipoteze

Odrediti da li sledeće pretpostavke predstavljaju parametarske ili neparametarske statističke hipoteze:

1. Procenat dana u kojima je zagađenje vazduha u NS bilo iznad preporučenog je u 2010 godini bio manji nego u 2020. (param)
2. Devijacija od propisane mase džakova brašna u jednom mlinu je 0,3kg. (param)
3. Postoji zavisnost između pola i visine ličnog dohotka u privatnim malim ili mikro preduzećima u Srbiji (neparam)
4. Broj povreda na radu u građevinskom sektoru u toku jednog kvartala ima Poasonovu raspodelu (neparam)

Postupak testiranja hipoteza

- Postupak statistički zasnovane provere hipoteza se zove testiranje hipoteza.
- Faze testiranja:

1. **Formulacija hipoteza**
2. **Statistički test**
3. **Zaključivanje**

- Ove faze su međusobno povezane, i samo ukoliko su sve tri pravilno realizovane smatramo da je reč o statistički zasnovanom zaključivanju

Formulacija hipoteza

- Prilikom testiranja hipoteza formulišemo 2 hipoteze:

početna (nulta) hipoteza H_0

alternativna (radna) hipoteza H_1

- Obično se početna hipoteza formuliše u obliku jednakosti, a alternativna kao njena negacija, tj. kao nejednakost.
- Pretpostavka koju želimo da proverimo je nekada sadržana u radnoj, a nekada u nultoj hipotezi.
- Hipoteze mogu da se odnose na ispitivanje jednog uzorka (tj. populacije), ili na upoređivanje dva ili više uzoraka.

Nulta i radna hipoteza

- Na primer, ukoliko je parametar populacije koji nas zanima srednja vrednost populacije **μ**:

početna hipoteza će biti

$H_0(\mu = \mu_0)$

A alternativna hipoteza može biti

dvostrana

$H_1(\mu \neq \mu_0)$

jednostrana

$H_1(\mu > \mu_0)$

$H_1(\mu < \mu_0)$

Metode testiranja hipoteza

- Testiranje preko intervala poverenja ćemo koristiti kod testiranja parametarskih hipoteza jednog uzorka, u slučaju dvostranog testa
- Testiranje preko test-statistika je uopšteniji metod, koristićemo ga kod testiranja neparametarskih hipoteza.

Zaključivanje

- Cilj testiranja hipoteza je da nakon statističkog testa donesemo **odluku** – da li odbacujemo početnu hipotezu ili ne.
- Ukoliko na osnovu testa odbacimo nultu hipotezu, zaključujemo da test argumentuje u prilog alternativne hipoteze.
- Ove odluke zavise od verovatnoće koja se zove

prag značajnosti α

o kojoj će u nastavku biti više reči.

- Metode zaključivanja:

1. Zaključivanje preko p-vrednosti
2. Zaključivanje preko kritične oblasti

Prag značajnosti i p-vrednost

Da li ćemo nultu hipotezu nakon testa odbaciti ili ne (tj. da li će test argumentovati u korist radne hipoteze ili ne) zavisi od:

1. **p-vrednosti** (p-value)
2. **praga značajnosti α** (significance level)

- ako je $p \leq \alpha$, odbacujemo H_0 (tj. test govori u prilog H_1).
- ako je $p > \alpha$, ne možemo odbaciti H_0 (tj. test ne govori u prilog H_1).

Naravno, to što uz pomoć statističkog testa odbacimo/ne odbacimo početnu hipotezu, ne znači da je ona sa sigurnošću netačna / tačna.

p-vrednost odgovara verovatnoći da uzorak podržava nultu hipotezu. Mala p-vrednost → odbacujemo H_0

Ishodi zaključivanja

Postoje 4 moguća ishoda pri zaključivanju

Odluka	Nulta hipoteza: tačna	Nulta hipoteza: netačna
ne odbaciti H_0	ispravna odluka	greška II vrste
odbaciti H_0	greška I vrste	ispravna odluka

Analogija sa suđenjem: kriv/nevin, osuđen/oslobođen.

Greška I vrste

- Postoje dve ispravne odluke i dve moguće greške u zaključivanju.

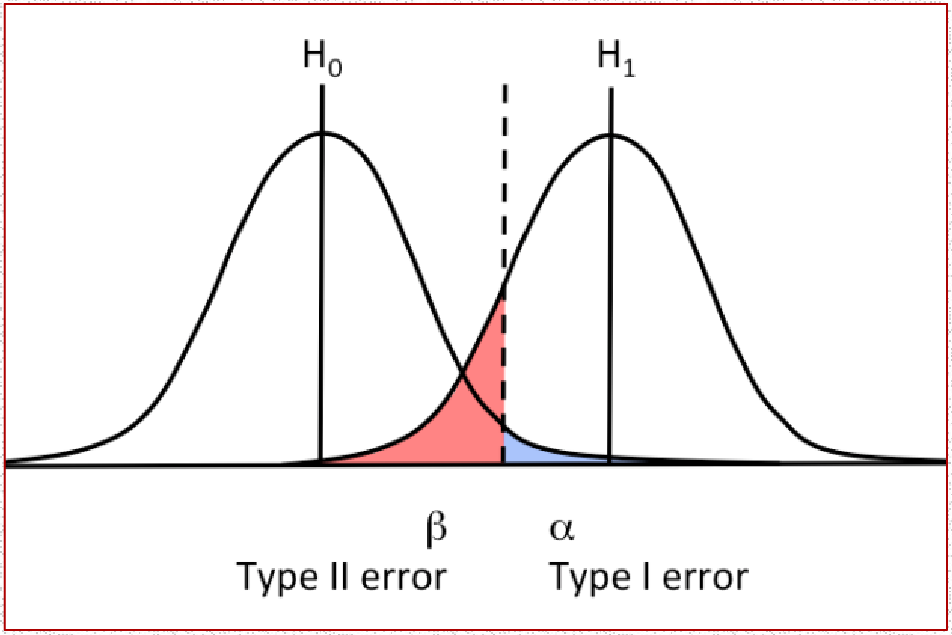
- Ukoliko na osnovu testa odbacimo nultu hipotezu, a ona je zapravo tačna, napravili smo **grešku I vrste.**
- Verovatnoća ove greške se zove **prag značajnosti (α)** i unapred se zadaje.
- Najčešća vrednost za α je 0.05, ali moguće je odabrati i neke druge, relativno male vrednosti, kao na primer 0.01 ili 0.1.

Greška I vrste – odbacivanje tačne H_0

Greška II vrste

- Sa druge strane, ako je nulta hipoteza zapravo netačna, a mi na osnovu testa nismo mogli da je odbacimo, napravili smo **grešku II vrste**.
- Verovatnoća ove greške se obeležava sa β.

Greška II vrste – ne odbacivanje netačne H_0



Moć testa

- Mogućnost javljanja ovih grešaka se ne može izbeći, one su sastavni deo statističkog zaključivanja.
- **Moć testa** predstavlja verovatnoću da smo na osnovu testa odbacili nultu hipotezu koja zaista jeste netačna, i iznosi 1 - β.
- Ukoliko želimo da jako smanjimo prag značajnosti i time minimizujemo javljanje greške I vrste, doći će do povećanja verovatnoće greške II vrste, a to će dovesti do smanjenja moći testa.
- Zbog toga se obično uzima da je $\alpha = 0{,}05$.

mala greška I vrste → mala moć testa!

Testiranje hipoteza pomoću CI

Moguće je u slučaju dvostrano formulisane radne hipoteze

1. Identifikuj nepoznati parametar populacije θ (μ, p ili σ).
2. Formuliši nultu $H_0(\theta = \theta_0)$ i radnu $H_0(\theta \neq \theta_0)$ hipotezu.
3. Definiši prag značajnosti α.
4. Konstruiši CI za dati parametar, sa nivoom poverenja $c = 1 - \alpha$
5. Utvrdi da li pretpostavljena vrednost parametra θ_0 pripada CI ili ne.
6. Zaključi:
   - Ukoliko θ_0 ne pripada CI, odbacujemo H_0 sa pragom značajnosti α.
   - Ukoliko θ_0 pripada CI, ne odbacujemo H_0 sa pragom značajnosti α.

Primer:

Nasumičnim odabirom 41 džaka brašna utvrđena je uzoračka standardna devijacija 0.05 kg. Uz pretpostavku da je težina džakova normalno raspoređena, sa pragom značajnosti 0.1 testirati hipotezu da je standardna devijacija težine 0.03kg.

$$H_0(\sigma = 0.03\text{kg}),\ H_1(\sigma \neq 0.03\text{kg}),\ \alpha = 0.1$$

CI: $0.04 < \sigma < 0.06$ (ranije izračunato)

0.03 ne pripada CI, pa odbacujemo sa pragom značajnosti 0.1 hipotezu da je standardna devijacija težine džakova 0.03kg.

Nastaviće se...