The 10th Conference on Mathematics in Engineering: Theory and Applications
Novi Sad, December 12-14th 2025

O PROBLEMU PAKOVANJA KVADRATA: NEIZBEŽNE TAČKE[1]

Radojka Ciganović [2]

https://doi.org/10.24867/META.2025.03 Stručni rad – prikaz

Sažetak. Neka $s(n)$ predstavlja stranicu najmanjeg kvadrata u koji se može spakovati n jediničnih kvadrata, koji se ne preklapaju. Jasno je da važi $s(n^2) = n$ i da je $s(n)$ neopadajuća funkcija. U ovom radu je dat pregled poznatih dokaza nekih jednostavnijih donjih ograničenja za $s(n)$, dobijenih uz pomoć skupova neizbežnih tačaka.

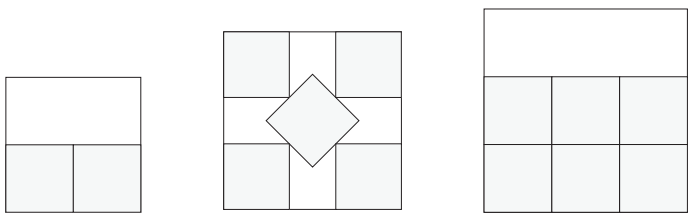
AMS klasifikacija (2020): 05B40, 52C15

Ključne reči: problem pakovanja kvadrata, metod neizbežnih tačaka, geometrijska optimizacija

1. Uvod

Definicija 1.1. Za prirodan broj n, neka je $s(n)$ stranica najmanjeg kvadrata u koji se može spakovati n jediničnih kvadrata. (Pogledati [1], problem D4)

Rezultat je očigledan kada je n potpuni kvadrat. Kako je $s(n)$ neopadajuća funkcija, zaključujemo da važi $\sqrt{n} \leq s(n) \leq \lceil \sqrt{n} \rceil$. Problem određivanja $s(n)$ kada n nije potpun kvadrat se pokazao kao nimalo lak zadatak. Nije previše teško videti da je $s(2) = 2$, dok je dokaz da je $s(5) = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ nešto komplikovaniji. Oba dokaza će biti prezentovana u nastavku rada. Iako su mnogi tvrdili da znaju kako da dokažu da je $s(6) = 3$ (videti sliku 1c), prvi publikovani dokaz datira iz 2002. godine.



$a)$ $b)$ $c)$

Slika 1: Optimalna pakovanja za dva, pet i šest jediničnih kvadrata

[1]Rad je podržan od strane projekta "Socio-tehnološki aspekti unapređenja nastavnog procesa na engleskom jeziku u opštim disciplinama", Departman za opšte discipline u tehnici, Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu

[2]Departman za opšte discipline u tehnici, Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu, e-mail: ciganovic.radojka@uns.ac.rs

Dok se gornja ograničenja za $s(n)$ dobijaju konkretnim konstrukcijama, mi ćemo za neke vrednosti funkcije $s(n)$ pronaći donja ograničenja. Pri tom ćemo koristiti metod koji predstavlja Fridmanovu modifikaciju (videti [2]) metoda koji je Stromkvist prvi upotrebio u svojim neobjavljenim beleškama (pogledati [4], beleška 1). Pre nego što to uradimo dokazaćemo nekoliko tehničkih lema[3], koje će imati ključnu ulogu u nastavku. Ove leme kažu da ako se centar jediničnog kvadrata nalazi u nekoj oblasti, tada kvadrat ima određene zajedničke tačke sa rubom posmatrane oblasti.

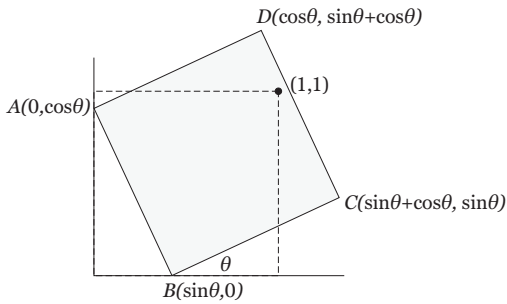
2. Pomoćna tvrđenja

Lema 2.1 ([2]). *Jedinični kvadrat koji je smešten u prvom kvadrantu i čiji se centar nalazi u* $[0,1]^2$ *sadrži tačku* $(1,1)$.

Dokaz. Dovoljno je pokazati da jedinični kvadrat u prvom kvadrantu koji dodiruje koordinatne ose Ox i Oy sadrži tačku $(1,1)$. Ako pretpostavimo da je kvadrat nagnut pod uglom $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, onda su temena koja se nalaze na koordinatnim osama $A(0, \cos\theta)$ i $B(\sin\theta, 0)$ (videti sliku 2). Rotacijom ova dva temena jedno oko drugog za uglove $-\frac{\pi}{2}$ i $\frac{\pi}{2}$ dobijamo koordinate preostala dva temena, $C(\sin\theta + \cos\theta, \sin\theta)$ i $D(\cos\theta, \sin\theta + \cos\theta)$. Sada je prava kroz tačke C i D data jednačinom $y = \sin\theta - \operatorname{ctg}\theta(x - \sin\theta - \cos\theta)$. Uvrštavanjem $x = 1$ u dobijenu jednačinu prave dobijamo da je

$$\begin{aligned} y &= \frac{\sin^2\theta - \cos\theta(1 - \sin\theta - \cos\theta)}{\sin\theta} = \frac{1 - \cos\theta + \sin\theta\cos\theta - \sin\theta + \sin\theta}{\sin\theta} \\ &= \frac{(1-\sin\theta)(1-\cos\theta) + \sin\theta}{\sin\theta} = \frac{(1-\sin\theta)(1-\cos\theta)}{\sin\theta} + 1 \geq 1, \end{aligned}$$

pa se tačka $(1,1)$ nalazi u posmatranom kvadratu. □



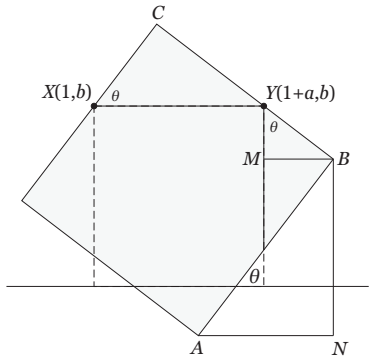
Slika 2: Jedinični kvadrat sa centrom u $[0,1]^2$

Primetimo da se prethodno tvrđenje može uopštiti. Neka je jedinični kvadrat smešten u prvom kvadrantu. Ako se centar kvadrata nalazi u pravougaoniku $[0,a] \times [0,b]$, gde je $0 < a, b \leq 1$, tada jedinični kvadrat sadrži tačku (a,b). (Pogledati [3].)

[3] U literaturi se ova tvrđenja mogu naći pod nazivom *non-avoidance lemmas*. Ovaj termin je prvi put upotrebljen u [4].

Lema 2.2 ([2]). *Neka za a i b važi $a + 2b < 2\sqrt{2}$, pri čemu je $0 < a, b \leq 1$. Tada svaki jedinični kvadrat u prvom kvadrantu sa centrom u pravougaoniku $[1, 1 + a] \times [0, b]$ sadrži bar jednu od tačaka $(1, b)$ i $(1 + a, b)$.*

Dokaz. Pokazaćemo da svaki jedinični kvadrat čiji se centar nalazi u pravougaoniku $[1, 1+a] \times [0, b]$ i koji na svojim stranicama ima tačke $(1, b)$ i $(1+a, b)$ sadrži u svojoj unutrašnjosti tačku na x-osi. Ako tačke $X(1, b)$ i $Y(1+a, b)$ leže na istoj stranici kvadrata, tvrđenje trivijalno važi.



Slika 3: Jedinični kvadrat sa centrom u $[1, 1 + a] \times [0, b]$

Neka je ugao koji kvadrat zaklapa sa x-osom $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ (slika 3). Pronaći ćemo koordinate "najnižeg"temena A posmatranog jediničnog kvadrata. U pravouglom $\triangle XYC$ važi $|XY| = a$, odakle dobijamo da je $|CY| = a \sin\theta$, pa je $|BY| = 1 - a \sin\theta$. Sledeći trougao koji gledamo je $\triangle YBM$, i pošto je $|MB| = (1-a \sin\theta) \sin\theta$ i $|MY| = (1-a \sin\theta) \cos\theta$, dobijamo da su koordinate temena $B(1 + a + (1 - a \sin\theta) \sin\theta,\ b - (1 - a \sin\theta) \cos\theta)$. Kako je $|AB| = 1$, u $\triangle ABN$ važi $|AN| = \cos\theta$ i $|BN| = \sin\theta$, odakle je

$$A(1 + a + (1 - a \sin\theta) \sin\theta - \cos\theta,\ b - (1 - a \sin\theta) \cos\theta - \sin\theta).$$

Posmatrajmo u nastavku funkciju $f(\theta) = \sin\theta + \cos\theta - a \sin\theta \cos\theta$. Tačka A se neće nalaziti u prvom kvadrantu ako je $f(\theta) > b$. Kako je ispunjeno

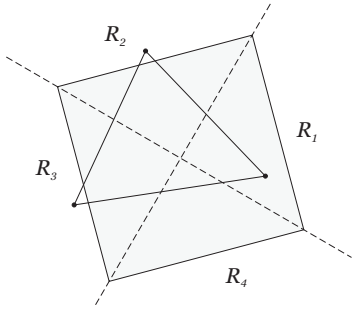
$$\begin{aligned} f'(\theta) &= \cos\theta - \sin\theta - a \cos^2\theta + x \sin^2\theta = \cos\theta - \sin\theta - a(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \\ &= (\cos\theta - \sin\theta)(1 - a(\cos\theta + \sin\theta)), \end{aligned}$$

jednostavnim trigonometrijskim računom dobijamo da su stacionarne tačke $(\cos\theta, \sin\theta) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ i $(\cos\theta, \sin\theta) = \left(\frac{1\pm\sqrt{2a^2-1}}{2a}, \frac{1\mp\sqrt{2a^2-1}}{2a}\right)$. Direktnom proverom zaključujemo da funkcija $f(\theta)$ dostiže lokalni minimum za $\theta = \frac{\pi}{4}$. Prema tome, kada je $b < f(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} - \frac{a}{2}$, teme A jediničnog kvadrata se neće nalaziti u prvom kvadrantu i postojaće tačka u unutrašnjosti kvadrata koja će biti na x-osi. □

Ova lema se najčešće primenjuje u slučaju kada je $a < 2\sqrt{2} - 2 \approx 0.828$ i $b = 1$, ili kada je $a = 1$ i $b < \sqrt{2} - \frac{1}{2} \approx 0.914$.

Lema 2.3 ([2],[4]). *Ako je centar jediničnog kvadrata smešten u $\triangle ABC$, pri čemu dužine stranica nisu veće od 1, tada kvadrat sadrži bar jedno od temena trougla.*

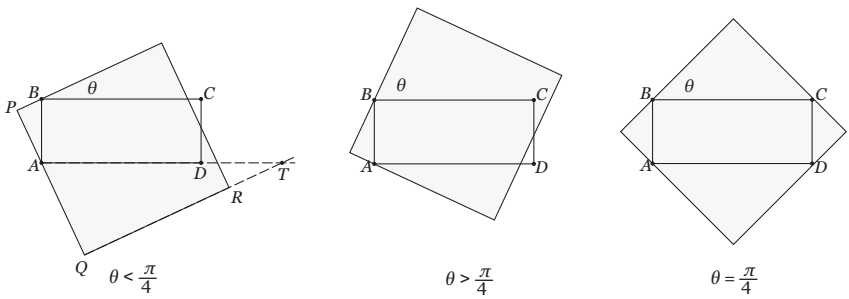
Dokaz. Neka su sa R_1, R_2, R_3 i R_4 označene 4 zatvorene oblasti na koje dijagonale kvadrata dele ravan (slika 4). Ukoliko bi se sva tri temena $\triangle ABC$ nalazila u jednoj, ili u dve susedne oblasti, tada se centar kvadrata ne bi nalazio u trouglu. Uzmimo zato, bez umanjenja opštosti, da se jedno teme $\triangle ABC$ nalazi u oblasti R_1, a da je drugo teme u oblasti R_3. Kako su stranice trougla dužine ≤ 1, nije moguće da se oba uočena temena trougla nalaze izvan kvadrata. $\square$



Slika 4: Jedinični kvadrat sa centrom u $\triangle ABC$

Lema 2.4 ([2]). *Ako se centar jediničnog kvadrata nalazi u pravougaoniku* $[0,1] \times [0,0.4]$, *tada kvadrat sadrži bar jedno teme pravougaonika.*

Dokaz. Uvedimo sledeće oznake za temena pravougaonika: $A(0,0), B(0,0.4)$, $C(1,0.4)$ i $D(1,0)$. Pokazaćemo da svaki jedinični kvadrat koji sadrži tačke A i B na rubu i čiji se centar nalazi unutar pravougaonika, mora da sadrži i bar jednu od tačaka C i D. Uočimo da okoliko su temena A i B na istoj stranici kvadrata, onda se i temena C i D nalaze na naspramnoj stranici kvadrata. U nastavku razlikujemo tri slučaja u zavisnosti od ugla $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ pod kojim je jedinični kvadrat nagnut (slika 5).



Slika 5: Jedinični kvadrati sa centrom u pravougaoniku $[0,1] \times [0,0.4]$

Pretpostavimo da važi $\theta < \frac{\pi}{4}$. Iz $\triangle ABP$ je $|AP| = 0.4\cos\theta$, odakle imamo $|AQ| = 1 - 0.4\cos\theta$. Neka se tačka T nalazi u preseku $p(A,D)$ i $p(Q,R)$. Sada je u $\triangle ATQ$ ispunjeno $|AT| = \dfrac{|AQ|}{\sin\theta} = \dfrac{1-0.4\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{1}{\sin\theta} - 0.4\operatorname{ctg}\theta$. Dobijamo $|AT| > \sqrt{2} - 0.4 \cdot 1 > 1 = |AD|$, odakle zaključujemo da se teme D pravougaonika nalazi u jediničnom kvadratu.

Analognim razmatranjem dobijamo da je teme C u kvadratu za $\theta > \frac{\pi}{4}$, dok se u slučaju kada je $\theta = \frac{\pi}{4}$ oba temena i C i D nalaze u unutrašnjosti kvadrata (videti sliku 5). $\square$

Uočimo da pokazane leme možemo primeniti i kada se centar jediničnog kvadrata nalazi u oblasti koja se može dobiti transliranjem i rotacijom osnovnih konfiguracija.

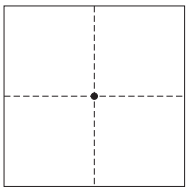
3. Skupovi neizbežnih tačaka

Definicija 3.1 ([2])**.** Skup tačaka P u kvadratu se naziva *neizbežan skup* ako svaki jedinični kvadrat koji je smešten u kvadrat mora sadržati barem jednu tačku iz skupa P, moguće i na stranicama.

Da bismo pokazali da je $s(n) \geq k$, dovoljno je pronaći neizbežan skup P koji sadrži $n-1$ tačku u kvadratu stranice dužine k.

Teorema 3.2 ([2], [4])**.** $s(2) = s(3) = 2$.

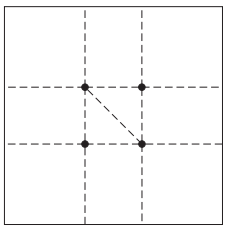
Dokaz. Posmatrajmo jedinični kvadrat u $[0,2]^2$. Centar uočenog kvadrata se može nalaziti u nekom od sledeća četiri kvadrata: $[0,1]^2$, $[0,1]\times[1,2]$, $[1,2]\times[0,1]$ ili $[1,2]^2$. Kako na osnovu leme 2.1 znamo da se tačka $(1,1)$ mora nalaziti u posmatranom jediničnom kvadratu, zaključujemo da je skup $P = \{(1,1)\}$ neizbežan u kvadratu $[0,2]^2$ (slika 6). Na ovaj način smo pokazali $s(2) \geq 2$. Kako već znamo da važi $s(2) \leq 2$ (pogledati sliku 1a), dobijamo $s(2) = 2$. Pošto je $s(4) = 2$ i $s(3) \leq s(4)$, zaključujemo da je i $s(3) = 2$. $\square$



Slika 6: Kvadrat stranice 2 sadrži jednu neizbežnu tačku

Teorema 3.3 ([2], [4])**.** $s(5) = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Dokaz. Neka je $P = \{(1,1), (1, 1+\frac{\sqrt{2}}{2}), (1+\frac{\sqrt{2}}{2}, 1), (1+\frac{\sqrt{2}}{2}, 1+\frac{\sqrt{2}}{2})\}$. Pomoću ove četiri tačke kvadrat sa stranicom $2+\frac{\sqrt{2}}{2}$ možemo podelili na 10 oblasti: 4 kvadrata, 4 pravougaonika i 2 trougla (slika 7).



Slika 7: Četiri neizbežne tačke u $[0, 2+\frac{\sqrt{2}}{2}]^2$

Ukoliko se centar nekog jediničnog kvadrata nalazi u jednom od uočenih kvadrata, tada na osnovu leme 2.1 znamo da je i odgovarajuća tačka skupa P takođe u posmatranom jediničnom kvadratu. Ako je centar jediničnog kvadrata

u nekom od pravougaonika, primenjujemo lemu 2.2, dok se u slučaju da je centar u nekom od trouglova, pošto su stranice oba trougla manje od ili jednake jedan, koristi lema 2.3. Ranije smo videli da je moguće spakovati 5 jediničnih kvadrata u kvadrat stranice $2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ (videti sliku 1*b*), odakle sledi tvrđenje. □

Teorema 3.4 ([2]). $s(8) = 3$.

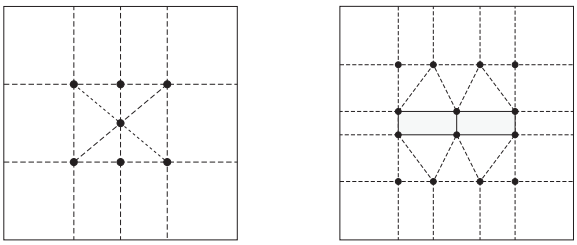
Dokaz. Tačke skupa $P = \{(0.9, 1), (1.5, 1), (2.1, 1), (1.5, 1.5), (0.9, 2), (1.5, 2), (2.1, 2)\}$ dele kvadrat sa stranicom 3 na 16 oblasti (pogledati sliku 8*a*). Ako se centar jediničnog kvadrata nalazi u nekom od četiri pravougaonika u uglovima velikog kvadrata, koristimo uopštenje leme 2.1. Za preostale pravougaonike i trouglove, isto kao u dokazu prethodnog tvrđenja, primenjujemo redom leme 2.2 i 2.3. Dobili smo da je posmatrani skup neizbežan, a kako je trivijalno $s(9) = 3$, zaključujemo $s(8) = 3$. □

Teorema 3.5 ([2]). $s(15) = 4$.

Dokaz. Posmatrajmo sledeći skup

$$\begin{aligned} P = \{&(1, 1), (1.6, 1), (2.4, 1), (3, 1), (1, 1.8), (2, 1.8), (3, 1.8), \\ &(1, 2.2), (2, 2.2), (3, 2.2), (1, 3), (1.6, 3), (2.4, 3), (3, 3)\}. \end{aligned}$$

Na dva pravougaonika u centru kvadrata primenjujemo lemu 2.4 (videti sliku 8*b*), dok se za ostale oblasti koriste prve tri leme na isti način kao u prethodnim dokazima. Pronašli smo neizbežan skup sa 14 tačaka u kvadratu stranice 4, pa važi $s(15) = 4$. □



a) $s(8) \geq 3$ *b*) $s(15) \geq 4$

Slika 8: Skupovi neizbežnih tačaka

Literatura

[1] H. T. Croft, K. J. Falconer, R. K. Guy, *Unsolved Problems in Geometry*, Springer Science+Business Media, New York, 1991

[2] E. Friedman, "Packing Unit Squares in Squares: A Survey and New Results", *Electron. J. Comb.*, Dynamic Survey #DS7, (1998, last version 2009), edited by D. Ellsworth `kingbird.myphotos.cc/packing/squares.html`)

[3] W. Stromquist, "Packing 10 or 11 Unit Squares in a Square", *Electron. J. Comb.*, **10** (2003), #R8

[4] W. Stromquist, "Packing Unit Squares Inside Squares, I, II, III", (1984), unpublished memoranda (`walterstromquist.com/publications.html`)