The 10th Conference on Mathematics in Engineering: Theory and Applications
Novi Sad, December 12-14th 2025

VIŠEKRITERIJUMSKO ODLUČIVANJE ZASNOVANO NA ENERGIJAMA FAZI SOFT SKUPOVA

Ljubica Mudrić - Staniškovski [1]

https://doi.org/10.24867/META.2025.14 Pregledni članak

Sažetak. Ovaj rad fokusiran je na metode višekriterijumskog odlučivanja zasnovane na energijama fazi soft skupova. Prikazana je primena singularnih vrednosti matrica za definisanje energije i λ-energije nekog fazi soft skupa, što omogućava efikasno donošenje odluka u uslovima nesigurnosti. Analizirane su prednosti ovog pristupa u poređenju sa drugim metodama višekriterijumskog odlučivanja, a ilustracije i praktične primene pokazuju njegovu primenljivost i pouzdanost.

AMS klasifikacija (2020): 03B52, 91B06

Ključne reči: fazi soft skupovi, energija, λ-energija, rangiranje alternativa, višekriterijumsko odlučivanje.

1. Uvod

Donošenje odluka u prisustvu nesigurnosti i nepreciznosti predstavlja jedan od ključnih izazova u mnogim naučnim i praktičnim oblastima, uključujući ekonomiju, inženjerstvo, medicinu i informacione tehnologije. Tradicionalni matematički pristupi često nisu dovoljni za modelovanje nesigurnih i nepotpunih informacija, što je motivisalo istraživače da razvijaju metode zasnovane na soft skupovima i njihovim generalizacijama.

Fazi skupovi, uvedeni od strane Zadeha [12], predstavljaju jedan od prvih formalnih pristupa za modelovanje nesigurnosti i nepreciznosti u podacima. Ovi skupovi omogućavaju predstavljanje elemenata univerzuma sa pripadnošću odredjenim stepenom, što pruža fleksibilnost u opisivanju situacija u kojima klasična logika nije dovoljna. Primena fazi skupova je naročito značajna u problemima donošenja odluka, optimizacije i kontrole, gde se parametri često ne mogu izraziti preciznim vrednostima.

Soft skupovi, uvedeni od strane Molodtsova [7], predstavljaju parametarski definisane kolekcije podskupova univerzuma, na taj način omogućavajući fleksibilno i intuitivno predstavljanje nesigurnih podataka kroz atribute i njihove vrednosti. Dalja generalizacija dovela je do fazi soft skupova, koji kombinuju fleksibilnost fazi logike sa parametrizacijom soft skupova, omogućavajući preciznije modelovanje nesigurnih i subjektivnih informacija uz relativno manju računsku složenost.

[1] Fakultet inženjerskih nauka, Univerzitet u Kragujevcu, e-mail: ljubica.mudric@kg.ac.rs

U okviru fazi soft skupova razvijen je koncept energije i λ-energije [9], koji se definiše preko singularnih vrednosti matrica reprezentacija skupa. Ovi energetski parametri omogućavaju kvantifikaciju doprinosa pojedinih elemenata sistema i predstavljaju osnovu za kreiranje efikasnih metoda višekriterijumskog odlučivanja. Korišćenjem energije fazi soft skupova moguće je sagledati i uporediti različite alternative u složenim problemima donošenja odluka, posebno kada se suočavamo sa višestrukim kriterijumima i nesigurnim informacijama.

Cilj ovog preglednog rada je da predstavi teorijske osnove fazi soft skupova, analizira koncept energije i λ-energije, i pruži pregled njihovih primena u metodama višekriterijumskog odlučivanja. Rad takođe upoređuje prednosti ovog pristupa sa drugim metodama donošenja odluka u uslovima nesigurnosti, ističući njegovu fleksibilnost i efikasnost u praktičnim problemima.

2. Fazi soft skupovi i koncept energija u visekriterijumskom odlučivanju

Fazi soft skupovi predstavljaju proširenje klasičnih soft skupova i fazi soft skupova, omogucavajući modelovanje nesigurnih i subjektivnih informacija u okviru više parametara. Svaki fazi soft skup može se prikazati u matričnom obliku [2], gde redovi odgovaraju elementima univerzuma, a kolone parametrima. Elementi matrice izražavaju stepen pripadnosti pojedinih elemenata odgovarajućim parametrima, čime se dobija numerička reprezentacija fazi soft skupa.

Pojam energije fazi soft skupa motivisan je analogijom sa energijom grafa, koju je uveo Gutman [5](1978) kao zbir apsolutnih vrednosti sopstvenih vrednosti matrice susedstva grafa. Slično tome, energija fazi soft skupa izrazava „ukupni doprinos“ elemenata sistema, kvantifikujući njegovu informativnu snagu.

Pošto svaki fazi soft skup možemo predstaviti odgovarajućom pravougaonom matricom A [2], možemo odrediti sopstvene vrednosti kvadratne matrice $A \cdot A^T$, a time i singularne vrednosti na dobro poznat način. U analizi fazi soft matrica ključnu ulogu imaju singularne vrednosti. One su kvadratni koreni nenultih sopstvenih vrednosti matrice $A \cdot A^T$ i pružaju informacije o strukturi matrice, njenoj stabilnosti i raspodeli doprinosa elemenata sistema. Singularne vrednosti omogućavaju kvantifikaciju značaja i informativnosti elemenata, što predstavlja osnovu za definisanje energija fazi soft skupova. Ovo nas dovodi do sledećih pojmova.

Definicija 2.1. [9] Energija fazi soft skupa Γ_A, u oznaci $\mathbf{E}(\Gamma_A)$, se definiše kao $\mathbf{E}(\Gamma_A) = \sum_{i=1}^{m} \sigma_i$, gde su $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \ldots \geqslant \sigma_m \geqslant 0$ singularne vrednosti matrice A koja odgovara fazi soft skupu Γ_A.

Definicija 2.2. [9] λ-energija fazi soft skupa Γ_A, u oznaci $\mathbf{LE}(\Gamma_A)$, se definiše kao $\mathbf{LE}(\Gamma_A) = \sum_{i=1}^{m} \sigma_i^2$, gde su $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \ldots \geqslant \sigma_m \geqslant 0$ singularne vrednosti matrice A koja odgovara fazi soft skupu Γ_A.

Ove veličine omogućavaju numeričku kvantifikaciju doprinosa elemenata sistema, i zbog svoje veze sa singularnim vrednostima predstavljaju efikasan alat za analizu i poređenje alternativa u metodama višekriterijumskog odlučivanja.

3. Primena energija fazi soft skupova u donošenju odluka

U ovom odeljku prikazujemo kako se energija i λ-energija fazi soft skupova mogu primeniti prilikom donošenja odluka. Bitan aspekt u sistemima sa više faktora jeste međuzavisnost svih elemenata: sistem funkcioniše optimalno kada svaki faktor doprinosi na svoj način. Pojedini faktori mogu da preuzmu odgovornost u nekim segmentima sistema, dok drugi segmenti ostaju nepokriveni, što može dovesti do problema ako ne postoji faktor koji pokriva određeni segment svojim kvalifikacijama. Ilustracije ovih situacija mogu se pronaći u radovima [2] i [11], pri čemu u radu [9] odluke donose na osnovu definisanih energija fazi soft skupova.

Autori u svom radu [2] uvode pojmove kardinalnog skupa i agregiranog fazi soft skupa zbog primene u algoritmu za donošenje odluka. Neka je Γ_A fazi soft skup nad univerzumom $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ i skupom parametara $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Kardinalni skup $c\Gamma_A$ je fazi skup nad E koji meri relativni doprinos svakog parametra skupu U. Funkcija pripadnosti kardinalnog skupa definisana je kao

$$\mu_{c\Gamma_A}(x) = \frac{|\Gamma_A(x)|}{|U|}, \quad x \in E,$$

gde $|\Gamma_A(x)|$ označava skalarnu kardinalnost fazi skupa $\Gamma_A(x)$.

Fazi soft skup Γ_A^* kombinuje informacije iz kardinalnog skupa $c\Gamma_A$ i originalnog fazi soft skupa Γ_A, tako da se funkcija pripadnosti za svaki element $u \in U$ računa kao

$$\mu_{\Gamma_A^*}(u) = \frac{1}{|E|} \sum_{x \in E} \mu_{c\Gamma_A}(x) \cdot \mu_{\Gamma_A(x)}(u).$$

Ovaj skup omogućava sumiranje doprinosa svih parametara za svaki element univerzuma i služi kao osnova za izbor najpovoljnijeg rešenja u algoritmu.

Metoda iz [2] sadrži algoritam za izbor najpovoljnije odluke u 4 koraka, koji glasi:

1. Konstruišemo fazi soft skup Γ_A nad U;
2. Odredimo kardinalni skup $c\Gamma_A$ od fazi soft skupa Γ_A;
3. Odredimo Γ^* na osnovu formiranog fazi soft skupa Γ_A;
4. Izaberemo najprihvatljivije rešenje tako što odredimo maksimalnu vrednost $\max \mu_{\Gamma_A^*}(u)$.

U radu [9] autori predstavljaju sličan algoritam, ali koristeći definisane pojmove energije i λ-energije fazi soft skupova. Algoritam za donošenje odluka zasnovan na energijama glasi:

1. Formiramo fazi soft skup Γ_A nad U;
2. Formiramo fazi soft skupove Γ_{A_i} nad $U \setminus \{u_i\}$ za svako $u_i \in U$;

3. Odredimo energije $E(\Gamma_{A_i})$ (ili λ-energije $LE(\Gamma_{A_i})$) za svaki fazi soft skup Γ_{A_i};

4. Odredimo minimalnu energiju od svih energija fazi soft skupova dobijenih u koraku 3 i interpretiramo dobijeni rezultat.

4. Analiza i diskusija

Metode višekriterijumskog odlučivanja zasnovane na energijama fazi soft skupova pružaju sistematičan pristup u evaluaciji alternativa pri prisustvu nesigurnosti i nepreciznih podataka. Energija i λ-energija fazi soft skupova, omogućavaju kvantifikaciju doprinosa svake alternative i identifikaciju ključnih faktora u sistemu.

Ovaj pristup je praktično primenjen, u radu [10] pri izboru cloud platformi u IT sektoru, gde rangiranje alternativa i kvantifikacija doprinosa atributa omogućavaju precizno donošenje odluka i povećanje zadovoljstva korisnika.

Upoređujući različite metode, možemo izdvojiti sledeće karakteristike:

1. Metoda zasnovana na fs-agregaciji ([2]) omogućava agregaciju fazi soft skupova i daje jedinstveno rešenje, ali zahteva upotrebu brojnih novih termina i konceptualno je složenija.

2. Metoda zasnovana na vrednostima nivoa soft skupa ([4]) koristi relativno grube kriterijume i ne garantuje jedinstveno rešenje, što može dovesti do nepreciznosti pri donošenju odluka.

3. Metode zasnovane na energiji i λ-energiji fazi soft skupova [9] daju jedinstveno rešenje u većini slučajeva.

Pored toga, metode zasnovane na energijama fazi soft skupova mogu se integrisati sa drugim metodama višekriterijumskog odlučivanja, što dodatno proširuje njihove mogućnosti u složenim problemima odlučivanja. Konkretno, kombinovanje sa metodama poput IT2FTOPSIS [8] ili drugim pristupima zasnovanim na tip-2 fazi skupovima [3], [6] omogućava dodatnu fleksibilnost i preciznost u rangiranju alternativa. Poredjenje ovih pristupa sa standardnim metodama izvršeno je u radu [10], gde je pokazano da primena energije i λ-energije fazi soft skupova dovodi do konzistentnih i pouzdanih rezultata pri izboru cloud platformi u IT sektoru.

Prednosti metoda zasnovanih na energijama fuzzy soft skupova uključuju:

1. Jedinstvenu identifikaciju najboljih alternativa u većini problema, uz mogućnost rangiranja svih alternativa.

2. Jasnu interpretaciju doprinosa pojedinih atributa u ukupnom sistemu.

3. Konzistentnost sa postojećim metodama i mogućnost integracije sa standardnim tehnikama višekriterijumskog odlučivanja.

4. Fleksibilnost u primeni na različite vrste problema, uključujući one sa nesigurnim i nepreciznim podacima.

Glavne ograničenja uključuju subjektivnost u definisanju kriterijuma, jednako ponderisanje atributa u trenutnim modelima i relativno složen izračunavanje energija za velike skupove podataka. Medjutim, prednost ovih metoda u preciznom rangiranju i identifikaciji ključnih faktora čini ih značajnim alatom u donošenju odluka u realnim scenarijima.

5. Zaključak

U ovom radu analizirane su metode višekriterijumskog odlučivanja zasnovane na energijama i λ-energiji fazi soft skupova. Ključna zapažanja su:

- Uvođenje energije i λ-energije kao numeričkih karakteristika fazi soft skupova omogućava kvantifikaciju doprinosa alternativa i atributa.
- Metode zasnovane na energijama omogućavaju jedinstveno rangiranje alternativa, dok u izuzetnim slučajevima više rešenja nastaje samo u specifičnim uslovima jednakosti matrica.
- Pristup zasnovan na korišćenju energija pruža jasnu i intuitivnu interpretaciju doprinosa atributa i alternativa u ukupnom sistemu.
- Poređenje sa postojećim metodama pokazuje da pristup zasnovan na energijama fazi soft skupova kombinovan sa singularnim vrednostima matrica omogućava preciznija i konzistentnija rešenja.
- Metodologija je fleksibilna i primenljiva na različite probleme višekriterijumskog odlučivanja sa nesigurnim podacima.

Buduća istraživanja mogu se fokusirati na:

- Istraživanje maksimuma energije fazi soft skupa i konstrukciju fuzzy soft skupova sa zadatom energijom.
- Primenu različitih tipova fazi brojeva i ponderisanja kriterijuma za povećanje fleksibilnosti metoda.
- Razvoj softverskih alata koji automatizuju izračunavanje energije i λ-energije za velike skupove podataka.
- Generalizaciju metoda na (a, b)-fazi soft skupove uvedene u radu [1], kao i dodatna istraživanja u vezi sa singularnom vrednošću matrica.

Integracija energije iz teorije grafova kao motivacije, uz upotrebu singularnih vrednosti matrica, omogućava konceptualno novu perspektivu u analizi fazi soft skupova i njihovoj primeni u višekriterijumskom odlučivanju.

Literatura

[1] T. M. Al-shami, J. C. R. Alcantud, A. Mhemdi, "New generalization of fuzzy soft sets: (a, b)–Fuzzy soft sets", AIMS Mathematics, vol. 8(2), pp. 2995-3025, 2023.

[2] N. Çağman, S. Enginoglu, F. Citak, "Fuzzy Soft Set Theory and Its Applications", Iranian Journal of Fuzzy Systems vol. 8 (3), pp. 137-147, September and October 2011.

[3] E. Celik, M. Gul, N. Aydin, A. T. Gumus, A. F. Guneri, "A comprehensive review of multi criteria decision making approaches based on interval type-2 fuzzy sets", Knowledge-Based Systems, vol. 85, pp. 329-341, 2015.

[4] F. Feng, J. B. Jun, X. Liu, L. Li, "An adjustable approach to fuzzy soft set based decision making", Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 234, pp. 10-20, May 2010.

[5] I. Gutman, "The energy of a graph", Ber. Math.Statist. Sekt. Forschungsz. Graz 103, pp. 1-22, 1978.

[6] N. Komatina, D. Tadić, G. Djurić, A. Aleksić, "Determination of manufacturing process failures priority under type 2 fuzzy environment: Application of genetic algorithm and Variable neighborhood search", Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part E, Journal of Process Mechanical Engineering, 09544089231160510, 2023.

[7] D. Molodtsov, "Soft set theory-first results", Computers and Mathematics with Applications vol. 37, pp. 19-31, February and March 1999.

[8] J. M. Mendel, "Uncertain rule-based fuzzy systems", Introduction and new directions, 684, 2017.

[9] Lj. Mudrić- Staniškovski, Lj. Djurović, N. Stojanović, "Energy of a fuzzy soft set and its application in decision-making", Iranian Journal of Fuzzy Systems, vol. 21(2), pp. 35-49, March and April 2024.

[10] Lj. Mudrić- Staniškovski, I. Spasenić, D. Tadić, N. Stojanović, "Evaluation and selection of cloud platforms in a fuzzy environment", Journal of Intelligent and Fuzzy Systems: Applications in Engineering and Technology, vol 49. pp. 1-13, July 2025.

[11] S. K. Pezuk, G. Senel, "An Application of Soft Multisets to a Decision-Making Problem Concerning Side Effects of COVID-19 Vaccines", Journal of New Theory, vol. 35, pp. 103-113, June 2021.

[12] L. A. Zadeh, "Fuzzy sets", Information and Control, vol. 8, pp. 338-353, June 1965.