The 10th Conference on Mathematics in Engineering: Theory and Applications
Novi Sad, December 12-14th 2025

# USREDNJENE KVADRATURNE FORMULE NA PROSTORU TRIGONOMETRIJSKIH POLINOMA

**Nevena Z. Petrović** [1]

https://doi.org/10.24867/META.2025.16 Pregledni članak

**Sažetak.**
U ovom radu predstavićemo usrednjene kvadraturne formule bazirane na Gaussovim i anti-Gaussovim kvadraturnim formulama koje su definisane na prostoru trigonometrijskih polinoma, kao i usrednjene Szegőve kvadraturne formule. Daćemo kratak opis načina njihovog konstruisanja i na kraju analizirati prednosti korišćenja jednog metoda u odnosu na drugi.

*AMS klasifikacija* (2020): 65D30, 65D32

*Ključne reči:* kvadraturne formule, ortogonalni polinomi, rekurentne relacije, težinske funkcije

## 1. Uvod

Numerička integracija je oblast numeričke matematike koja se bavi približnim izračunavanjem vrednosti određenih integrala, koristeći vrednosti podintegralne funkcije na nekom skupu tačaka. Formule za aproksimaciju vrednosti jednostrukih integrala nazivamo kvadraturnim formulama ili kvadraturama. Poznate Gaussove kvadraturne formule, uvedene 1814. godine [1], postižu maksimalni algebarski stepen tačnosti. Od tada su ove kvadraturne formule razmatrane od strane mnogih naučnika i generalizovane u više pravaca. Konstruisane su formule Gaussovog tipa na drugim linearnim prostorima, kao što su prostor trigonometrijskih polinoma, prostor racionalnih funkcija, itd. Prvi radovi u oblasti kvadraturnih formula Gaussovog tipa za trigonometrijske polinome publikovani su od strane ruskih matematičara Turetzkiiog i Mysovskikhog [11, 12, 15], a u poslednje dve decenije su se ovom oblašću bavili i profesori G. V. Milovanović, M. P. Stanić, A. S. Cvetković i T. V. Tomović Mladenović [8, 9, 10, 14]. Njihova pažnja bila je usmerena na proučavanje trigonometrijskih polinoma celobrojnog i polu-celobrojnog stepena, njihovu primenu na konstruisanje kvadraturnih formula, kao i ocene njihovih ostataka.

Označimo sa $w$ težinsku funkciju, koja je integrabilna i nenegativna na intervalu $[-\pi, \pi)$. Za svaki nenegativan ceo broj $n$, $\mathcal{T}_n$ će predstavljati linearni prostor svih trigonometrijskih polinoma stepena manjeg ili jednakog $n$.

[1]Katedra za opšte obrazovne nauke, Fakultet za mašinstvo i građevinarstvo u Kraljevu, Univerzitet u Kragujevcu, e-mail: nevena.z.petrovic@pmf.kg.ac.rs

Posmatrajmo integral:

$$\widehat{I}f = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)w(x)dx.$$

U nastavku ćemo analizirati usrednjene kvadraturne formule za aproksimaciju ovog integrala.

## 2. Usrednjene Gaussove kvadraturne formule

Sa $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$, $A_k \in \mathcal{T}_n$, označimo niz trigonometrijskih polinoma ortogonalnih na intervalu $[-\pi, \pi)$ u odnosu na skalarni proizvod

$$\langle f, g\rangle_w = \widehat{I}(fg). \tag{2.1}$$

Tada je odgovarajuća Gaussova kvadraturna formula

$$\widehat{G}_{\widetilde{n}+1}f = \sum_{k=0}^{\widetilde{n}} \omega_k f(x_k), \quad \widetilde{n} = 2(n - 1/2), \tag{2.2}$$

tačna za sve trigonometrijske polinome $t \in \mathcal{T}_{2n-1}$ ako i samo ako su čvorovi $x_k$, $k = 0, 1, \ldots, \widetilde{n}$ nule trigonometrijskog polinoma $A_n \in \mathcal{T}_n$.

Vođeni idejom Dirk Laurieja [7], koji je 1996. godine uveo pojam anti-Gaussovih kvadraturnih formula na prostoru algebarskih polinoma, sa osobinom da daju grešku jednake veličine ali suprotnog znaka u odnosu na grešku nastalu primenom odgovarajuće Gaussove kvadrature, krećemo u konstruisanje anti-Gaussovih kvadraturnih formula $\widehat{H}_{\widetilde{n}+3}$ na prostoru trigonometrijskih polinoma (videti [13]). Postavljajući navedeni uslov $(\widehat{H}_{\widetilde{n}+3} - \widehat{I})f = -(\widehat{G}_{\widetilde{n}+1} - \widehat{I})f$, dolazimo do posmatranja bilinearne forme:

$$(f, g)_w = (2\widehat{I} - \widehat{G}_{\widetilde{n}+1})(fg). \tag{2.3}$$

Sa $\{B_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ ćemo označavati niz trigonometrijskih polinoma ortogonalnih u odnosu na bilinearnu formu (2.3). Odgovarajuća Gaussova kvadratura ima $\widetilde{n}+1$ čvor, dok će odgovarajuća anti-Gaussova kvadraturna formula imati $\widetilde{n}+3$ čvora (zbog $n \mapsto n+1$), pa će ona biti oblika $\widehat{H}_{\widetilde{n}+3} = \sum_{k=0}^{\widetilde{n}+3} \widehat{\omega}_k f(\widehat{x}_k)$. Čvorovi ove anti-Gaussove kvadraturne formule su zapravo nule trigonometrijskog polinoma

$$B_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \left(p_k \cos(kx) + q_k \sin(kx)\right), \quad |p_{n+1}| + |q_{n+1}| \neq 0.$$

Specijalno, izborom $(p_{n+1}, q_{n+1}) = (1, 0)$ i $(p_{n+1}, q_{n+1}) = (0, 1)$ dobijamo trigonometrijske polinome sa vodećim kosinusnim, odnosno sinusnim, termom

$$B_{n+1}^C(x) = \cos(n+1)x + \sum_{k=0}^{n} \left(p_k^{(n+1)} \cos(kx) + q_k^{(n+1)} \sin(kx)\right),$$

$$B_{n+1}^S(x) = \sin(n+1)x + \sum_{k=0}^{n} \left(r_k^{(n+1)} \cos(kx) + s_k^{(n+1)} \sin(kx)\right),$$

redom. Nadalje ćemo posmatrati samo parne težinske funkcije $w$ na intervalu $(-\pi, \pi)$. Tada imamo:

$$B_{n+1}^C(x) = \sum_{k=0}^{n+1} p_k^{(n+1)} \cos(kx), \qquad \text{pri čemu je} \qquad p_{n+1}^{(n+1)} = 1,$$

$$B_{n+1}^S(x) = \sum_{k=0}^{n+1} s_k^{(n+1)} \sin(kx), \qquad \text{pri čemu je} \qquad s_{n+1}^{(n+1)} = 1.$$

Lako se dolazi do zaključka da polinomi $B_{n+1}^C$ i $B_{n+1}^S$ zadovoljavaju tročlane rekurentne relacije:

$$B_{n+1}^C(x) = \left(2\cos x - a_{n+1}^{(1)}\right) B_n^C(x) - a_{n+1}^{(2)} B_{n-1}^C(x), \tag{2.4}$$

$$B_{n+1}^S(x) = \left(2\cos x - d_{n+1}^{(1)}\right) B_n^S(x) - d_{n+1}^{(2)} B_{n-1}^S(x), \tag{2.5}$$

pri čemu se koeficijenti računaju na osnovu vrednosti odgovarajućih bilinearnih formi. Formule za određivanje ovih koeficijenata mogu se naći u radu [13], gde je takođe pokazano da važi $B_k^C(x) = A_k^C(x)$ i $B_k^S(x) = A_k^S(x)$ za sve $k = 0, 1, \ldots, n$, pa je za određivanje polinoma $B_{n+1}(x)$ dovoljno samo jednom primeniti navedenu rekurentnu relaciju.

U radu [13] pokazali smo kako na jednostavan način možemo konstruisati anti-GAUSSove kvadrature na prostoru trigonometrijskih polinoma, koristeći čvorove i težinske koeficijente iz već poznatih anti-Gaussovih kvadratura na prostoru algebarskih polinoma. U nastavku navodimo ove rezultate bez dokaza.

**Lema 2.1** ([13]). *Neka je $w$ parna težinska funkcija na intervalu $(-\pi, \pi)$ i neka su $\tau_k$ i $\sigma_k$, $k = 1, \ldots, n+1$, čvorovi i težinski koeficijenti anti-*GAUSS*ove kvadraturne formule sa $n+1$ čvorom, konstruisane na prostoru algebarskih polinoma u odnosu na težinsku funkciju $u_1(x) = w(\arccos x)/\sqrt{1-x^2}$ na $(-1, 1)$. Tada se težinski koeficijenti $\widehat{\omega}_k$ i čvorovi $\widehat{x}_k$, $k = 0, 1, \ldots, 2n+1$, anti-*GAUSS*ove kvadrature sa $2n+2$ čvora, konstruisane u odnosu na težinsku funkciju $w$, mogu odrediti pomoću formula:*

$$\begin{aligned} \widehat{\omega}_k &= \widehat{\omega}_{2n+1-k} = \sigma_{k+1}, && k = 0, 1, \ldots, n, \\ \widehat{x}_k &= -\widehat{x}_{2n+1-k} = -\arccos \tau_{k+1}, && k = 0, 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

**Lema 2.2** ([13]). *Neka je $w$ parna težinska funkcija na intervalu $(-\pi, \pi)$ i neka su $\tau_k$ i $\sigma_k$, $k = 1, \ldots, n+1$, čvorovi i težinski koeficijenti anti-*GAUSS*ove kvadraturne formule sa $n+1$ čvorom, konstruisane na prostoru algebarskih polinoma u odnosu na težinsku funkciju $u_2(x) = \sqrt{1-x^2}\, w(\arccos x)$ na $(-1, 1)$. Tada se težinski koeficijenti $\widehat{\omega}_k$ i čvorovi $\widehat{x}_k$, $k = 0, 1, \ldots, 2n+1$, anti-*GAUSS*ove kvadraturne formule sa $2n+2$ čvora, konstruisane u odnosu na težinsku funkciju $w$, mogu odrediti na sledeći način:*

$$\begin{aligned} \widehat{\omega}_k &= \widehat{\omega}_{2n+1-k} = \frac{\sigma_{k+1}}{1-\tau_{k+1}^2}, && k = 0, 1, \ldots, n, \\ \widehat{x}_k &= -\widehat{x}_{2n+1-k} = -\arccos \tau_{k+1}, && k = 0, 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Sada, kada imamo konstruisane GAUSSove kvadraturne formule $\widehat{G}_{\widetilde{n}+1}f$ i anti-GAUSSove kvadraturne formule $\widehat{H}_{\widetilde{n}+3}f$, možemo uvesti takozvane *usrednjene* GAUSS*ove kvadraturne formule* na prostoru trigonometrijskih polinoma:

$$\widehat{A}_{2\widetilde{n}+4}f = \frac{1}{2}\left(\widehat{G}_{\widetilde{n}+1} + \widehat{H}_{\widetilde{n}+3}\right) f.$$

Ove formule će imati tačnost $\widetilde{n}+2$, odnosno jednakost $\widetilde{I}f = \widehat{A}_{2\widetilde{n}+4}f$ će biti ispunjena za sve $f \in \mathcal{T}_{\widetilde{n}+2}$.

## 3. Usrednjene SZEGŐve kvadraturne formule

Poznato je da su SZEGŐve kvadraturne formule primenljive na integraciju periodičnih funkcija na jediničnoj kružnici. Godine 2007. KIM i REICHEL su u radu [6] uveli anti-SZEGŐve kvadraturne formule koje karakteriše osobina da je greška nastala primenom ove kvadraturne formule na LAURENTove polinome stepena ne većeg od $n$ jednaka proizvodu negativne konstante i greške dobijene primenom SZEGŐve kvadraturne formule sa $n$ čvorova, odnosno

$$(I - A_{\mu,\tau}^{(n)})p = -c(I - S_{\mu,\tau}^{(n)})p, \qquad \text{za sve} \qquad p \in \Lambda_{-n,n},$$

gde je sa $S_{\mu,\tau}^{(n)}$ označena SZEGŐva kvadraturna formula sa $n$ čvorova, a sa $A_{\mu,\tau}^{(n)}$ odgovarajuća anti-SZEGŐva kvadratura. Koristeći ove kvadraturne formule, JAGELS, REICHEL i TANG su u radu [5] definisali uopštene usrednjene SZEGŐve kvadrature koje su tačne za sve LAURENTove polinome prostora $\Lambda_{-n+1,n-1}$.

Bazirano na analizi odgovarajućih para-ortogonalnih polinoma, pokazano je da se čvorovi uopštene usrednjene SZEGŐve kvadraturne formule računaju kao sopstvene vrednosti unitarne gornje HESSENBERGove matrice $\breve{H}_{2n-2}(\tau)$, dimenzije $(2n-2)\times(2n-2)$. Ova matrica određena je parametrom $\tau$ sa jedinične kružnice i takozvanim SCHUROvim parametrima $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$, koji se javljaju kao koeficijenti u rekurentnim relacijama ovih polinoma. Težinski koeficijenti se tada mogu izračunati kao kvadrati prvih komponenti odgovarajućih jediničnih sopstvenih vektora (videti [5], [6]). Takođe, pokazano je da se pomenuta gornja HESSENBERGova matrica $\breve{H}_{2n-2}(\tau)$ može predstaviti u obliku $\breve{H}_{2n-2}(\tau) = \widehat{D}_{2n-2}^{-1/2}\widehat{H}_{2n-2}(\tau)\widehat{D}_{2n-2}^{1/2}$, gde je

$$\widehat{H}_{2n-2}(\tau) = \begin{bmatrix} -\bar{\gamma}_0\gamma_1 & -\bar{\gamma}_0\gamma_2 & \cdots & -\bar{\gamma}_0\gamma_{n-1} & -\bar{\gamma}_0\gamma_{n-2} & \cdots & -\bar{\gamma}_0\gamma_1 & -\bar{\gamma}_0\tau \\ 1-|\gamma_1|^2 & -\bar{\gamma}_1\gamma_2 & \cdots & -\bar{\gamma}_1\gamma_{n-1} & -\bar{\gamma}_1\gamma_{n-2} & \cdots & -\bar{\gamma}_1\gamma_1 & -\bar{\gamma}_1\tau \\ 0 & 1-|\gamma_2|^2 & \cdots & -\bar{\gamma}_2\gamma_{n-1} & -\bar{\gamma}_2\gamma_{n-2} & \cdots & -\bar{\gamma}_2\gamma_1 & -\bar{\gamma}_2\tau \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & & \cdots & & 0 & 1-|\gamma_1|^2 & -\bar{\gamma}_1\tau \end{bmatrix},$$

kao i $\gamma_0 = 1$, $\widehat{D}_{2n-2} = diag[\widehat{\delta}_0, \widehat{\delta}_1, \ldots, \widehat{\delta}_{2n-3}]$, $\widehat{\delta}_0 = 1$, $\widehat{\delta}_j = \widehat{\delta}_{j-1}\left(1-|\widehat{\gamma}_j|^2\right)$, $j = 1, \ldots, 2n-3$, $\widehat{\gamma}_j = \gamma_j$, $j = 1, \ldots, n-1$ i $\widehat{\gamma}_j = \gamma_{2n-2-j}$, $j = n, \ldots, 2n-3$. Postoji nekoliko algoritama za dekompoziciju ovakvih matrica (videti [4], [3], [2]), a izračunavanje sopstvenog sistema može se izvesti veoma efikasno korišćenjem kompaktne reprezentacije HESSENBERGove matrice (videti npr. [4], [2]).

## 4. Poređenje metoda

Kao što smo u prethodnim poglavljima naveli, usrednjene GAUSSove kvadraturne formule definisane u radu [13] mogu se primenjivati na prostoru trigonometrijskih polinoma samo u slučajevima kada je težinska funkcija parna, dok uopštene usrednjene SZEGŐve kvadraturne formule [5] imaju širu oblast primene. Međutim, naš metod usrednjenih GAUSSovih kvadraturnih formula koristi rekurentne relacije za određivanje potrebnih ortogonalnih sistema kako bi se izbegla numerička nestabilnost koja je karakteristična za GRAM-SCHMIDTov postupak. Takođe, rekurentne relacije obezbeđuju stabilan način za izračunavanje vrednosti trigonometrijskih polinoma u odnosu na korišćenje proširenih formi.

Koristeći usrednjene GAUSSove kvadraturne formule za trigonometrijske polinome uspeli smo da postignemo mnogo veću tačnost u poređenju sa usrednjenim SZEGŐvim kvadraturama na klasi simetričnih težinskih funkcija, koju ćemo demonstrirati u narednom primeru.

**Primer 4.1** ([13])**.** Posmatrajmo težinsku funkciju $w(x) = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ na $(-\pi,\pi)$ i integrand $f(x) = \frac{1}{2}\log(5+4\cos x)$. U tabeli 1 predstavljene su greške nastale primenom SZEGŐve $S_1^n(f)$, anti-SZEGŐve $A_1^n(f)$, uopštene usrednjene SZEGŐve kvadrature $\widehat{S}_1^{(2n-2)}(f)$, kao i GAUSSove $\widehat{G}_{\widetilde{n}+1}f$, anti-GAUSSove $\widehat{H}_{\widetilde{n}+3}f$ i usrednjene GAUSSove kvadrature $\widehat{A}_{2\widetilde{n}+4}f$, uz uslov $\widetilde{n}+1=n$. Možemo primetiti da su greške koje nastaju primenom GAUSSovih i SZEGŐvih, odnosno anti-GAUSSovih i anti-SZEGŐvih kvadratura, približne. Međutim, očigledno je da usrednjene GAUSSove kvadrature za trigonometrijske polinome daju značajno poboljšanje u odnosu na uopštene usrednjene SZEGŐve kvadrature, koje su predstavljale najbolje rezultate u radu [5]. To poboljšanje je značajnije sa porastom broja čvorova.

Tabela 1: GREŠKE U SZEGŐVOJ ($S_1^n(f)$), ANTI-SZEGŐVOJ ($A_1^n(f)$), UOPŠTENOJ USREDNjENOJ SZEGŐVOJ ($\widehat{S}_1^{(2n-2)}(f)$), GAUSSOVOJ ($\widehat{G}_{\widetilde{n}+1}f$), ANTI-GAUSSOVOJ ($\widehat{H}_{\widetilde{n}+3}f$) I USREDNjENOJ GAUSSOVOJ ($\widehat{A}_{2\widetilde{n}+4}f$) KVADRATURI ZA $w(x) = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$, $x \in (-\pi,\pi)$, I $f(x) = \frac{1}{2}\log(5+4\cos x)$

| Pravilo | $n=12$ | $n=18$ |
|---|---|---|
| $S_1^n(f)$ | $-2,2\cdot 10^{-5}$ | $-2,3\cdot 10^{-7}$ |
| $A_1^n(f)$ | $2,3\cdot 10^{-5}$ | $2,4\cdot 10^{-7}$ |
| $\widehat{S}_1^{(2n-2)}(f)$ | $-1,5\cdot 10^{-7}$ | $-6,7\cdot 10^{-10}$ |
| $\widehat{G}_{\widetilde{n}+1}f$ | $-1,98\cdot 10^{-5}$ | $-2\cdot 10^{-7}$ |
| $\widehat{H}_{\widetilde{n}+3}f$ | $1,98\cdot 10^{-5}$ | $2\cdot 10^{-7}$ |
| $\widehat{A}_{2\widetilde{n}+4}f$ | $-5,31\cdot 10^{-10}$ | $-8,75\cdot 10^{-14}$ |

## Literatura


[1] C. F. Gauss, "Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi", *Commentationes Societatis Regiae Scientarium Recentiores*, vol. 3, pp. 123-162, 1814.

[2] W. B. Gragg, "The QR algorithm for unitary Hessenberg matrices", *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 16, pp. 1-8, 1986.

[3] W. B. Gragg and L. Reichel, "A divide and conquer method for the unitary and orthogonal eigenproblems", *Numer. Math.*, vol. 57, pp. 695-718, 1990.

[4] M. Gu, R. Guzzo, X-B. Chi and X-Q. Cao, "A stable divide and conquer algorithm for the unitary eigenproblem", *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, vol. 25, pp. 385-404, 2003.

[5] C. Jagels, L. Reichel and T. Tang, "Generalized averaged Szegő quadrature rules", *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 311, pp. 645-654, 2017.

[6] S-M. Kim and L. Reichel, "Anti-Szegő quadrature rules", *Math. Comp.*, vol. 76, pp. 795-810, 2007.

[7] D. P. Laurie, "Anti-Gaussian quadrature formulas", *Math. Comp.*, vol. 65 (214), pp. 739-747, 1996.

[8] G. V. Milovanović, A. S. Cvetković and M. P. Stanić, "A special Gaussian rule for trigonometric polynomials", *Banach J. Math. Anal.*, vol. 1 (1), pp. 85-90, 2007.

[9] G. V. Milovanović, A. S. Cvetković and M. P. Stanić, "Explicit formulas for five-term recurrence coefficients of orthogonal trigonometric polynomials of semi-integer degree", *Appl. Math. Comput.*, vol. 198, pp. 559-573, 2008.

[10] G. V. Milovanović, A. S. Cvetković and M. P. Stanić, "Trigonometric orthogonal systems and quadrature formulae", *Comput. Math. Appl.*, vol. 56, 11, pp. 2915-2931, 2008.

[11] I. P. Mysovskikh, "Quadrature formulae of the highest trigonometric degree of accuracy", *Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz.*, vol. 25 (8), pp. 1246-1252, 1985.

[12] I. P. Mysovskikh, "Algorithms to construct quadrature formulae of highest trigonometric degree of precision", *Metody Vychisl.*, vol. 16, pp. 5-16, 1991.

[13] N. Z. Petrović, M. P. Stanić and T. V. Tomović Mladenović, "Anti-Gaussian quadrature rule for trigonometric polynomials", *Filomat*, vol. 36(3), pp. 1005-1019, 2022.

[14] T. V. Tomović and M. P. Stanić, "Quadrature rules with an even number of multiple nodes and a maximal trigonometric degree of exactness", *Filomat*, vol. 20(10), pp. 2239-2255, 2015.

[15] A. H. Turetzkii, "On quadrature formulae that are exact for trigonometric polynomials", *East J. Approx.*, vol. 11, pp. 337-359, 2005.