The 10th Conference on Mathematics in Engineering: Theory and Applications
Novi Sad, December 12-14th 2025

Kreissova konstanta za Mittag-Lefflerove funkcije

Vladimir Kostić [1] **i Ilja Uzelac Bujišić** [2]

https://doi.org/10.24867/META.2025.18 Pregledni članak

Sažetak

U ovom radu proučavamo prolazno vezu između rešenja sistema frakcionih diferencijalnih jednačina i Kreissove matrične teoreme. Iako se asimptotska stabilnost matrice A određuje položajem njenog spektra, rešenja mogu pokazivati značajno tranzitivno ponašanje, analogno klasičnom fenomenu opisanom Kreissovim teoremom. Mittag - Lefflerove funkcije $E_{\alpha,\beta}(t)$ predstavljaju generalni oblik rešenja sistema frakcionih diferencijalnih jednačina. Ovaj pregledni rad daje kratak pregled navedene teme u slučaju obi;nih diferencijalnih jednačina $\alpha = \beta = 1$ i uvodi hipotezu o gornjoj granici norme $E_{\alpha,1}(At^{\alpha})$ putem frakcionog pseudospektra za slučaj $\alpha < \beta = 1$.

AMS klasifikacija (2020): 15A60, 37N35

Ključne reči: Frakcione diferencijalne jednačine, Kreissova matrična teorema, Mittag - Lefflerove funkcije.

1 Uvod

Ovaj rad se bavi pregledom Kreissove matrične teoreme te njenim proširenjem na novu klasu funkcija - Mittag Lefflerove funkcije. Prva Kreissova matrična teoremu je dokazao Heinz-Otto Kreiss 1962. te tako postavio temelje za ograničavanje norme stepena matrica. Ona je rezultat višedecenijskog proučavanja stabilnosti linearnih operatora i diskretnih semigrupa. Pri posmatranju asimptotski stabilnih linearnih sistema (onih u kojima rešenja teže nuli kako vreme t teži beskonačnosti), primećeno je da njihovo tranzientno ponašanje (recimo za neki konačni interval vremena $t \in [A, B]$) može biti takvo da norma rešenja značajno raste. Kreissova matrična teorema i njena eksplicitna forma, vid. [1], daje ograničenje na ponašanje sistema u tranzientnoj fazi. Pri tome se razlikuju dva glavna slučaja - matrični stepenovi i matrična eksponencijalna funkcija.

Novi oblik Kreissove matrične teoreme koji je glavna tema ovog rada odnosi se primene teoreme na kompleksniji skup funkcija, konkretno Mittag - Lefflerove funkcije [2]. Njihova praktična važnost ogleda se u tome što one predstavljaju rešenje Frakcionog sistema diferencijalnih jednačina [3]. koji

[1] IIT Genova, e-mail: vladimir.slk@gmail.com
[2] Matematički Institut SANU, e-mail: bujisiciljamat@gmail.com

je privukao veliku pažnju tokom poslednjih godina zbog brojnih uspešnih primena kada je u opisivanju dinamike fizičkih procesa koji ispoljavaju ne-lokalne osobine, npr. kretanje objekta u viskoznom medijumu. Ovaj rad uvodi generalizaciju Kreissove konstante za ocenu tranzicijskog rasta linearnih sistema frakcionih diferencijalnih jednačina izraženog putem Mitteg-Lefflerovih funkcija.

2 Frakcioni Diferencijalni Operatori

Definicija 2.1. Mittag–Lefflerova funkcija $E_\alpha(z)$, smatra se generalizacijom eksponencijalne funkcije za jedan fiksan realan parametar $\alpha > 0$ definisana konvergentnim redom

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}.$$

Iz navedene formule, vidljivo je da važi $E_1(z) = e^z$.

Definicija 2.2. U generalnijem dvoparametarskom obliku za $\alpha, \beta > 0$ definisana je sa:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}$$

Definicija 2.3. Riemann - Liouvilleov frakcioni integralni operator se definiše kao :

$$J^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t f(\tau)(t-\tau)^{\alpha-1}\, d\tau, \alpha > 0, \tau > 0$$

Kombinacijom ove formule i celobrojnih izvoda, može se definisati frakcioni izvod reda $\alpha > 0$

Definicija 2.4. Kaputov (Caputo) frakcioni izvod funkcije $f(t)$:

$$\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} = D^\alpha f(t) = J^{m-\alpha} D^m f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-m+1}}\, d\tau,\ m-1 < \alpha \leq m,$$

gde $\Gamma(\cdot)$ označava Gama funkciju.

Ukoliko je α prirodan broj, navedena definicija se svodi na standardan izvod.

Analogno celobrojnim izvodima, i u frakcionom slučaju mogu se definisani dinamički sistemi koristeći frakcione diferencijalne jednačine.

Definicija 2.5. Linearni frakcioni dinamički sistem $\mathbf{x}(t)$ gde t označava vreme, $\mathbf{x}$ je vektor stanja, a $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je matrica sistema definisan je sa:

$$\frac{d^\alpha \mathbf{x}(t)}{dt^\alpha} = A\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, x^{(1)}(0) = x_0^1, ..., x^{(n-1)}(0) = x_0^{n-1}$$

U navedenom obliku vektor $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]^T$ označava redove frakcionog izvoda, a diferencijalni operator

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} = \left[\frac{d^{\alpha_1}}{dt^{\alpha_1}}, \frac{d^{\alpha_2}}{dt^{\alpha_2}}, \ldots, \frac{d^{\alpha_n}}{dt^{\alpha_n}}\right]^T$$

je definisan Kaputovim frakcionim izvodima $\frac{d^{\alpha_k}}{dt^{\alpha_k}}$ reda $\alpha_k > 0$, za $k = 1, 2, \ldots, n$.

Identično kao i u standardnim diferencijalnim jednačinama, i u ovom slučaju istraživanje stabilnosti ovakvih dinamičkih sistema od izuzetne je važnosti u teoriji kontrole. Glavna pitanja se odnose na potrebne i dovoljne uslove za stabilnost ovakvih sistema [4].

U specifičnom slučaju u kojem su svi redovi frakcionih izvoda jednaki, tj:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_k = \alpha$$

i inicijalni uslovi :

$$x^{(1)}(0) = x^{(2)}(0) = ... = x^{(n-1)}(0) = 0$$

važi da je rešenje ovog sistema :

$$x(t) = E_\alpha(At^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$$

gde je $E_\alpha(At)$ Mittag - Leflerova funkcija.

Neka je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ kvadratna matrica i neka $\|\cdot\|$ označava normu nad matricama indukovanu kvadratnom normom na $\mathbb{C}^n$. Onda su definisane dve relevantne Kreissove konstane.Prva Kreissova konstanta se odnosi na diskretno stepenovanje matrica i definisana je u odnosu na jedinični kompleksni krug.

Definicija 2.6. Diskretna Kreissova konstanta $\mathcal{K}(A)$ definisana je sa:

$$\mathcal{K}_d(A) = \sup_{|z|>1} (\,|z| - 1\,)\,\|(zI - A)^{-1}\|.$$

Dok je Kreissova konstanta vezana za eksponencijalnu funkciju primenjenu na matrici je definisana sa:

$$\mathcal{K}_c(A) = sup_{Re(z)>0} Re(z)\|(zI - A)^{-1}\|$$

U sledećoj teoremi navedena je Kreissova teorema za eksponencijalni slučaj.

Teorema 2.7. *Neka je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrica čiji takva da je njen celi spektar $\sigma(A)$ u levoj kompleksnoj poluravni onda važi:*

$$\mathcal{K}_c(A) \leq \sup_{t\geq 0} \|e^{tA}\| \leq en\mathcal{K}_c(A)$$

gde t označava neprekidno vreme.

Važnost ovih teorema je ta što one daju konkretno gornje ograničenje na normu matrice u tranzijentnom stanju dinamičkog sistema. Dakle, ako je i poznato da dinamički sistem konvergira nuli asimptotski, često nije potpuno jasno kako se sistem ponaša u tranzijentnoj fazi sistema tj za $t \in [A, B]$ za neke konačne A, B. Ova teorema jasno daje ograničenje norme u tim slučajevima jer navedeno ograničenje zavisi samo od $\mathcal{K}$ i od dimenzije matrice n, a ne od vremena t ili stepena k.

3 Generalizacija Kreissove Matrične teoreme

Logično pitanje je može li se navedena teorema primenjivati na široj klasi funkcija, osim samo stepenovanja i eksponencijalne funkcije primenjene na matricu A. Kako bi se do tog pitanja došlo, neophodno je prvo ustanoviti uslove pod kojima je navedeni sistem stabilan. U [3] je naveden uslov za asimptotsku stabilnost ovakvih sistema u zavisnosti od spektra matrice A i uvedeno je uopštenje pseudospektra za linearne frakcione dinamičke sisteme.

Teorema 3.1. *Frakcioni dinamički sistem definisan matricom A i stepenima izvoda $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = \alpha$ je stabilan ako i samo ako je $|arg(\lambda)| > \frac{\alpha\pi}{2}$ za svako $\lambda \in \sigma(A)$ tj ako je :*

$$\Lambda(A) \subseteq \Omega_\alpha := \{z \in \mathbb{C} : \frac{\alpha\pi}{2} < arg(z) < 2\pi - \frac{\alpha\pi}{2}\}$$

Definicija 3.2. Matrica koja ispunjava navedeni uslov stabilnosti se naziva α-*frakciono stabilna* matrica.

Za ovakvu matricu se može definisati α - pseudospektar, slično klasičnoj definiciji pseudospektra.

Definicija 3.3. Za matricu $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ α - pseudospektar je definisan sa :

$$\Lambda_{\alpha,\epsilon}(A) := \{z \in \mathbb{C} : \|[R_A^\alpha(z)]^{-1}\|^{-1} \leq \epsilon\}$$

gde je $R_A^\alpha(z)$ rezolventa stepena α:

$$R_A^\alpha(z) = \|(z^\alpha - A)^{-1}\|.$$

U slučaju eksponencijalne funkcije, t.j. $\alpha = 1$, Kreissova konstanta za eksponencijalnu funkciju može se izraziti preko *spektralne abscise* matrice A, $a_\epsilon(A)$:

$$a_\epsilon(A) := max\{Re(\lambda) \ : \lambda \in \Lambda_\epsilon(A)\}$$

gde $\Lambda_\epsilon(A)$ predstavlja ϵ - *pseudospektar* matrice A:

$$\Lambda_\epsilon(A) = \{z \in \mathbb{C} : \|(z - A)^{-1}\| < \epsilon\}$$

Onda se Kreissova konstanta $\mathcal{K}_c(A)$ može izraziti kao :

$$\mathcal{K}_c(A) = sup_{\epsilon>0} \frac{a_\epsilon(A)}{\epsilon}$$

Ovaj oblik Kreissove konstante direktno povezuje pseudospektar matrice sa njenim tranzitivnim ponašanjem. Dokaz teoreme 2.7. detaljno je prikazan u poglavlju 18 [5] i svodi se na dva glavna elementa - Spijkerovu teoremu i integraciju po konturi koja ograničava spektar matrice. Pri tome kontura mora ograničavati spektar matrice $\Lambda(A)$ za koji se pretpostavlja da je u levoj kompleksnoj poluravni.

Smatramo da se ovaj dokaz može generalizovati na širu klasu Mittag-Lefferovih funkcija. Pri stepenovanju sa α granica skupa koji ograničava pseudospektar prelazi u $\partial\Omega_\alpha$ koja se sastoji od dve linije u desnoj poluravni - jedna predstavlja $arg(z) = \frac{\alpha\pi}{2}$,a druga $-\frac{\alpha\pi}{2}$.

Ukoliko je $x(t)$ rešenje sistema frakcionih diferencijalnih jednačina u slučaju kad je $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = \alpha$, A matrica koja zadaje taj sistem, onda važi nejednakost predstavljena sledećom teoremom.

Hipoteza 3.1. *Ukoliko je A matrica takva da ispunjava uslov Teoreme 3.1. za parametar α, i ako važi $Re(z) < 0$ za sve $z \in \sigma(A)$ onda postoji konstanta $c > 0$ koja zavisi od n i α takoda važi:*

$$\|x(t)\| \leq c\mathcal{K}_f^\alpha(A) \tag{3.1}$$

gde je

$$\mathcal{K}_f^\alpha(A) := \sup_{\epsilon>0} \frac{a_\epsilon^\alpha}{\epsilon}$$

za

$$a_\epsilon^\alpha := max\{Re(\lambda^\alpha) \ : \lambda \in \Lambda_{\alpha,\epsilon}(A)\}$$

Prvo, primetimo da uslov frakcione stabilnosti garantuje da je $\mathcal{K}_f^\alpha < \infty$, kao i da je rešenje $x(t)$ ograničeno za $t > 0$. Dakle, pitanje je zapravo koliko $c > 0$ može biti mala. U slučaju $\alpha = 1$, znamo da je $c = en$.

Ideja vodilja u pravcu generalizacije dokaza optimalne konstante je sledeća jednakost putem Laplasove transformacije koja važi za sektorijalne operatore [4] dobijena putem Laplasove transformacije:

$$E_\alpha(t^\alpha A) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{st}s^{\alpha-1}(s^\alpha I - A)^{-1}ds, \tag{3.2}$$

gde je γ Bromwich-ova linija $s\colon Re(s) = 1/t$ za neko $t > 0$, a u $s^{\alpha-1}$ koristimo glavnu granu u $\mathbb{C}$.

Primetimo da je slučaju $\alpha = 1$ gornja karakterizacije postaje $e(tA) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{st}(sI-A)^{-1}ds$ klasični razvoj matrične eksponencijalne funkcije $e(tA) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{st}(sI - A)^{-1}ds$.

Dalje, (3.2) je ekvivalentna sledećem integralu

$$E_\alpha(t^\alpha A) = \frac{1}{2\pi i\alpha}\int_\gamma e^{t\,z^{1/\alpha}}(zI - A)^{-1}dz, \tag{3.3}$$

gde je sada γ z-slika Bromwich-ove konture preslikavanjem $s \mapsto s^\alpha = z$, i za $z^{1/\alpha}$ koristimo glavnu granu u $\mathbb{C}$.

Koristeći prethodne karakterizacije zajedno da Spajkerovom teoremom i definicijom frakcione Krajsove konstante, Ootvoren problem je pronaći minimalnu konstantu $c > 0$ koristeći prethodne karakterizacije zajedno da Spajkerovom teoremom i definicijom frakcione Krajsove konstante, tako da (3.1) važi..

Literatura

[1] S. Raouafi, "A generalization of the Kreiss Matrix Theorem," *Linear Algebra and its Applications*, vol. 549, pp. 86–99, 2018.

[2] H. J. Haubold, A. M. Mathai, and R. K. Saxena, "Mittag-Leffler functions and their applications," *Journal of Applied Mathematics*, vol. 2011, no. 1, pp. 298628, 2011.

[3] E. Šanca, V. R. Kostić and Lj. Cvetković, "Fractional pseudospectra and their localizations," *Linear Algebra and its Applications*, vol. 559, pp. 244–269, 2018.

[4] Z. M. Odibat, "Analytic study on linear systems of fractional differential equations," *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 59, no. 3, pp. 1171–1183, 2010.

[5] L. N. Trefethen, "Pseudospectra of matrices," *Numerical Analysis*, vol. 91, pp. 234–266, 1991.