

Prezime, ime, br. indeksa:

- Zaokružiti koje od osobina Refleksivnosti, Simetričnosti, Antisimetričnosti i Tranzitivnosti ima relacija $\{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a)\}$ u skupu $\{a, b, c\}$: R S A T
- Neka su funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definisane sa $f(x) = x^2 + 2$ i $g(x) = 2x - 3$. Tada je:
 $(f \circ g)(x) =$ $(g \circ f)(x) =$ $(g \circ g)(x) =$
- Neka je f funkcija definisana sa $f = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$. Tada je
 $f^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$, $f \circ f = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$, $f \circ f^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$.
- U Bulovoj algebri $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$ su tačna tvrđenja (zaokružiti):
1) $a \cdot (a + b) = a$ 2) $a + 1 = a$ 3) $a + 1 = 1$ 4) $a + 1 = a'$ 5) $1 + 1 = 1$
6) $a(b + c) = ab + ac$ 7) $a + b = a \cdot b$
- Od sledećih struktura, grupe su (zaokružiti):
1) $(\mathbb{Z}, +)$ 2) $(\mathbb{Z}, \cdot)$ 3) $(\{-1, 0, 1\}, \cdot)$ 4) $(\mathbb{R}, +)$ 5) $(\mathbb{C}, +)$ 6) $(\mathbb{Z}_4, +)$ 7) $(\mathbb{Z}_4, \cdot)$
- Od sledećih struktura, polja su (zaokružiti):
1) $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ 2) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ 3) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ 4) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ 5) $(\mathbb{C}, +, \cdot)$
- Ako je $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 1 + i$, tada je:
 $z_1 + z_2 =$ $z_1 \cdot z_2 =$ $\frac{z_1}{z_2} =$ $\arg(z_1) =$ $\arg(z_2) =$
- $NZD(P, Q)$ za polinome $P = (t - 3)^4(t + 7)^2(t - 1)^5(t + 13)^3$ i $Q = (t - 3)^2(t - 15)(t - 1)^7(t + 13)^5$ je:
1) $(t - 3)^4(t - 1)^7(t + 13)^5$ 2) $(t - 3)(t - 1)(t + 13)$ 3) $(t - 3)^4(t + 7)^2(t - 1)^7(t + 13)^5(t - 15)$
4) $(t - 3)(t + 7)(t - 1)(t + 13)(t - 15)$ 5) $(t - 3)^2(t - 1)^5(t + 13)^3$

Zadaci 11. Napisati *SDNF*, sve proste implikante i sve minimalne *DNF* Bulove funkcije

x	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
z	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
u	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
f	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0

Karnoovu kartu nacrtati kao na slici:

	x	x'	
z			u
			u'
z'			u
	y	y'	y

2. Ispitati sve aksiome komutativne grupe za uređeni par $(A, *)$, gde je $A = \{a, b, c\}$ i operacija $*$ je definisana Kejljevom tablicom.

$*$	a	b	c
a	a	a	a
b	b	b	b
c	c	c	c

3. Nad poljima $\mathbb{C}$ i $\mathbb{R}$ faktorizovati polinom $p(x) = x^4 - x^3 - x + 1$.

- Za matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 7 & 7 & 7 \end{bmatrix}$ izračunati:

$$A + B = \quad \det(A) = \quad \det(B) = \quad \det(A \cdot B) =$$

- Za koje vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ je sistem linearnih jednačina $x + ay = a \wedge x + ay = 0$ nad poljem realnih brojeva: **1)** kontradiktoran: **2)** neodređen: **3)** određen:
- Za vektore $\vec{a} = (3, 3, -1)$ i $\vec{b} = (-1, 3, -2)$ je:
 - 1)** $2\vec{a} + \vec{b} =$ _____ **2)** $|\vec{a}| =$ _____ **3)** $\vec{a}\vec{b} =$ _____ **4)** $\vec{a} \times \vec{b} =$ _____
- Ako je T težište trougla ABC , napisati $\overrightarrow{AT}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\overrightarrow{AB} = \vec{n}$ i $\overrightarrow{BC} = \vec{m}$:
 $\overrightarrow{AT} =$ _____
- Neka je p prava čija je jednačina $x - 1 = \frac{y-2}{5} = \frac{z-3}{3}$. Napisati jedan vektor pravca prave p :
 $\vec{p} = (\quad , \quad , \quad)$ i koordinate jedne tačke prave p : $(\quad , \quad , \quad)$.
- Prave $p : \vec{r} = (-3, 2, 6) + t(-2, 1, -4), t \in \mathbb{R}$ i $q : \vec{r} = (0, 0, 0) + t(4, -2, 8), t \in \mathbb{R}$ su:
 - 1)** paralelne i različite **2)** poklapaju se **3)** seku se u tačno jednoj tački **4)** mimoilazne
- Zaokružiti tvrđenja koja su tačna za bilo koje realne kvadratne matrice A, B i C reda 2:
 - 1)** $A + B = B + A$ **2)** $AB = BA$ **3)** $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$ **4)** $\det(AB) = \det(A) \det(B)$
 - 5)** $\det(A^3) = (\det(A))^3$ **6)** $\det(\alpha A) = \alpha \det(A)$ ($\alpha \in \mathbb{R}$)
- Zaokružiti funkcije koje su linearne transformacije, i za one koje jesu napisati odgovarajuću matricu:
 - 1)** $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z) = x + 2y + 3z$
 - 2)** $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, g(x, y) = (0, \sin x + \cos y)$

Zadaci 2

- Neka su tačke A i P određene svojim vektorima položaja $\vec{r}_A = (-1, 2, 1)$ i $\vec{r}_P = (3, 1, 4)$, i neka je $\vec{p} = (1, 2, 2)$ i $\vec{n} = (3, 0, -1)$. Prava p je određena sa $P \in p$ i $p \parallel \vec{p}$, a ravan α je određena sa $A \in \alpha$ i $\vec{n} \perp \alpha$. Izračunati vektore položaja tačke $T = p \cap \alpha$ (prodor prave p kroz ravan α), tačke P' koja je projekcija tačke P na ravan α , i tačke P'' koja je simetrična tački P u odnosu na ravan α .
- Diskutovati po $a \in \mathbb{R}$ sistem jednačina:

$$\begin{array}{rrcr} -x & + & 2y & + & z & = & -a \\ 2x & + & y & + & az & = & 1 \\ ax & + & 4y & + & 7z & = & -1 \end{array}$$
- Rešiti po izboru jedan od sledećih zadataka:
 - Dati su vektori: $\vec{a} = (1, -1, 0), \vec{b} = (0, 1, 1), \vec{c} = (2, 0, k), \vec{d} = (3, 0, m)$.
 Odrediti vrednost realnog parametra k tako da vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ budu komplanarni.
 Odrediti vrednost realnog parametra m tako da vektor $\vec{d}$ bude kolinearan vektoru $\vec{a} + \vec{b}$.
 - Date su linearne transformacije
 $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y) = (x - y, x + 2y, 3x - y),$
 $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, g(x, y, z) = (x - 2y + z, -x + y + 2z, 2x - 3y + z).$
 Napisati matrice M_f i M_g linearnih transformacija f i g . Odrediti, ako postoje, linearne transformacije f^{-1} i g^{-1} .

REŠENJA ZADATAKA

1. SDNF: $xy'zu' + xy'z'u' + x'y'zu + x'y'zu' + x'y'z'u' + x'y'z'u + x'yzu + x'yzu' + x'yz'u.$

Proste implikante: $x'z, y'u', x'u, x'y'.$

$$\text{MDNF} = x'z + y'u' + x'u.$$

2. Uočimo da operaciju $*$ možemo definisati i sa

$$\forall x, y \in A, \quad x * y = x.$$

Operacija je asocijativna jer za sve $x, y, z \in A$ dobijamo

$$x * (y * z) = x * y = x \quad \wedge \quad (x * y) * z = x * z = x.$$

Komutativna nije jer je npr. $a * b = a \neq b = b * a.$

Neutralni element ne postoji. Naime, svaki element je desni neutralni element jer je kolona svakog elementa jednaka graničnoj koloni, ali ni jedan element nije levi neutralni jer ni jednom od njih njegova vrsta nije jednaka graničnoj vrsti.

3. Kandidati za racionalne korene polinoma $p(x) = x^4 - x^3 - x + 1$ su 1 i -1 . Kako je $p(1) = 0$, deljenjem polinoma $p(x)$ sa $x - 1$ dobijamo $p(x) = (x - 1)(x^3 - 1)$. Kako za polinom $q(x) = x^3 - 1$ takodž"e vađž"i $q(1) = 0$, deljenjem polinoma $q(x)$ sa $x - 1$ dobijamo da je $q(x) = (x - 1)(x^2 + x + 1)$, odakle sledi $p(x) = (x - 1)^2(x^2 + x + 1)$. Koreni polinoma $r(x) = x^2 + x + 1$ su kompleksni brojevi

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}, \text{ te faktORIZACIJE polinoma } p \text{ redom nad poljima } \mathbb{R} \text{ i } \mathbb{C} \text{ glase}$$

$$p(x) = (x - 1)^2(x^2 + x + 1) = (x - 1)^2 \left(x - \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \right) \left(x - \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \right).$$

4. Primenom formule za prodor prave p kroz ravan α dobijamo

$$\begin{aligned}\vec{r}_T &= \vec{r}_P + \frac{(\vec{r}_A - \vec{r}_P)\vec{n}}{\vec{n}\vec{p}}\vec{p} = (3, 1, 4) + \frac{((-1, 2, 1) - (3, 1, 4)) \cdot (3, 0, -1)}{(3, 0, -1) \cdot (1, 2, 2)}(1, 2, 2) \\ &= (3, 1, 4) + \frac{(-4, 1, -3) \cdot (3, 0, -1)}{1}(1, 2, 2) = (3, 1, 4) + \frac{-9}{1}(1, 2, 2) = (3, 1, 4) + (-9, -18, -18) \\ &= (-6, -17, -14).\end{aligned}$$

Primenom formule za projekciju tačke P kroz ravan α dobijamo

$$\begin{aligned}\vec{r}_{P'} &= \vec{r}_P + \frac{(\vec{r}_A - \vec{r}_P)\vec{n}}{\vec{n}\vec{n}}\vec{n} = (3, 1, 4) + \frac{((-1, 2, 1) - (3, 1, 4)) \cdot (3, 0, -1)}{(3, 0, -1) \cdot (3, 0, -1)}(3, 0, -1) \\ &= (3, 1, 4) + \frac{(-4, 1, -3) \cdot (3, 0, -1)}{10}(3, 0, -1) = (3, 1, 4) + \frac{-9}{10}(3, 0, -1) = (3, 1, 4) + \left(-\frac{27}{10}, 0, \frac{9}{10}\right) \\ &= \left(\frac{3}{10}, 1, \frac{49}{10}\right).\end{aligned}$$

Za tačku P'' koja je simetrična tački P u odnosu na ravan α važi $\overrightarrow{PP''} = \overrightarrow{P'P'}$ odnosno $\vec{r}_{P''} - \vec{r}_P = \vec{r}_{P'} - \vec{r}_{P'}$, dakle

$$\vec{r}_{P''} = 2\vec{r}_{P'} - \vec{r}_P = 2\left(\frac{3}{10}, 1, \frac{49}{10}\right) - (3, 1, 4) = \left(-\frac{24}{10}, 1, -\frac{58}{10}\right) = \left(-\frac{12}{5}, 1, -\frac{29}{5}\right).$$

5. Determinanta sistema je

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ a & 4 & 7 \end{vmatrix} = -7 + 2a^2 + 8 - a - 28 + 4a = 2a^2 + 3a - 27,$$

$$\text{te je } D = 0 \text{ za } a_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 216}}{4} = \left\{-\frac{9}{2}, 3\right\}.$$

(1) Za $a \notin \left\{-\frac{9}{2}, 3\right\}$ je sistem određen (jer je tada $D \neq 0$).

(2) Za $a = -\frac{9}{2}$ sistem glasi

$$\begin{array}{rclcl} -x & + & 2y & + & z & = & \frac{9}{2} \\ 2x & + & y & + & -\frac{9}{2}z & = & 1 \\ -\frac{9}{2}x & + & 4y & + & 7z & = & -1 \\ \Leftrightarrow [1] & & -x & + & 2y & + & z & = & \frac{9}{2} \\ & & & & 5y & - & \frac{5}{2}z & = & 10 \\ & & & & -5y & + & \frac{5}{2}z & = & -\frac{85}{4} \\ \Leftrightarrow [2] & & -x & + & 2y & + & z & = & \frac{9}{2} \\ & & & & 5y & - & \frac{5}{2}z & = & 10 \\ & & & & 0 & = & -\frac{45}{4} \end{array}$$

[1] - Prvu jednačinu pomnoženu sa 2 dodamo drugoj, i prvu jednačinu pomnoženu sa $-\frac{9}{2}$ dodamo trećoj.

[2] - Drugu jednačinu dodamo trećoj.

Sledi da je u ovom slučaju sistem kontradiktoran.

(3) Za $a = 3$ dobijamo sistem pod (a) koji je jedan puta neodređen.

6. (1) Da bi vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ bili koplanarni, potreban i dovoljan uslov je da njihov mešoviti proizvod bude jednak nuli, tj. da je jednaka nuli determinanta čije su npr. kolone redom koordinate vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$. Kako je

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k \end{vmatrix} = k - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = 2,$$

sledi da su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ koplanarni ako i samo ako je $k = 2$.

Označimo $\vec{n} = \vec{a} + \vec{b} = (1, 0, 1)$. Vektori $\vec{d}$ i $\vec{n}$ su kolinearni ako i samo ako je $\vec{d} = \alpha \vec{n}$ za neko $\alpha \in \mathbb{R}$. Kako je

$$\begin{aligned} \exists \alpha \in \mathbb{R}, \vec{d} = \alpha \vec{n} &\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}, (3, 0, m) = \alpha(1, 0, 1) = (\alpha, 0, \alpha) \\ &\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}, (3 = \alpha \wedge 0 = 0 \wedge m = \alpha), \end{aligned}$$

odakle dobijamo da mora biti $\alpha = 3$ i $m = 3$. Dakle, vektori $\vec{d}$ i $\vec{a} + \vec{b}$ su kolinearni ako i samo ako je $m = 3$.

$$(2) \quad M_f = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad M_g = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Linearna transformacija f nije izomorfizam jer njena matrica nije kvadratna, te f^{-1} ne postoji.

Kako je M_g kvadratna matrica i $\det M_g = -2 \neq 0$, sledi da g jeste izomorfizam te postoji linearna transformacija g^{-1} (ako postoji, inverzna funkcija linearne transformacije je linearna transformacija). Pri tome je

$$M_{g^{-1}} = M_g^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

te je

$$g^{-1}(x, y, z) = \left(-\frac{7}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{5}{2}z, -\frac{5}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}z, -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z \right).$$