

Prezime, ime, br. indeksa:

- U skupu $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ date su relacije: $\rho_1 = \{(1, 1), (2, 2), (1, 5)\}$, $\rho_2 = \{(1, 1), (2, 2), (1, 4), (4, 1)\}$
Iza oznake svake od tih relacija zaokružiti samo ona slova koja označavaju svojstvo relacije koju ona poseduje: R-refleksivnost, S-simetričnost, A-antisimetričnost, T-tranzitivnost.
 $\rho_1 : \text{ R S A T} \quad \rho_2 : \text{ R S A T}$
- Neka su funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definisane sa $f(x) = e^x$ i $g(x) = -2x + 3$. Tada je:
 $(f \circ g)(x) = \quad (g \circ f)(x) = \quad (g \circ g)(x) =$
- Neka je f funkcija definisana sa $f = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$. Tada je
 $f^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}, f \circ f = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}, f \circ f^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}.$
- Napisati *SDNF* Bulovog izraza $f(x, y, z) = ((xz' + yz')' + x)'$:
- Zaokružiti brojeve ispred iskaza koji su tačni za svako $x, y, z \in G$ u asocijativnom i komutativnom grupoidu $(G, *)$ sa neutralnim elementom e :
1) $x*x = x$ **2)** $x*e*y = x*y$ **3)** $(x*y)*z = z*(x*y)$
4) $x*y = x*z \Rightarrow y = z$ **5)** $x*x*e = x$ **6)** postoji inverzni element neutralnog elementa e
- Od sledećih struktura, grupe su (zaokružiti):
1) $(\mathbb{Z}, +)$ **2)** $(\mathbb{Z}, \cdot)$ **3)** $(\{-1, 0, 1\}, \cdot)$ **4)** $(\{-1, 1\}, \cdot)$ **5)** $(\mathbb{Z}_4, +)$ **6)** $(\mathbb{Z}_4, \cdot)$
- Koje od navedenih struktura su prsteni:
1) $(\mathbb{N}, \cdot, +)$ **2)** $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ **3)** $(\mathbb{Z}, \cdot, +)$ **4)** $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ **5)** $(\mathbb{C}, \cdot, +)$ **6)** $(\mathbb{C}, +, \cdot)$
- U polju $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ izračunati:
1) $-2 =$ **2)** $2^{-1} =$ **3)** $2 \cdot 4 + 1 =$ **4)** $3^{-1} + 3 \cdot 3 =$
- Zaokružiti polja nad kojima je polinom $t^3 - 1$ svodljiv: $\mathbb{Q} \quad \mathbb{R} \quad \mathbb{C} \quad \mathbb{Z}_2 \quad \mathbb{Z}_3$
- Ako je $z_1 = -2 - 3i$, $z_2 = -3 + i$, tada je:
 $z_1 + z_2 = \quad z_1 \cdot z_2 = \quad \frac{z_1}{z_2} = \quad |z_1| = \quad \arg(z_1) =$
- Navesti geometrijsku interpretaciju kompleksnih funkcija $f_i : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$:
 $f_1(z) = \bar{z}$ _____
 $f_2(z) = \text{Im}(z) + i\text{Re}(z)$ _____
- Korišćenjem funkcije $\arg : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow (-\pi, \pi]$ i osnovnih operacija kompleksnih brojeva napisati formulu za orijentisani ugao između vektora $\vec{uw}$ i $\vec{vw}$: $\angle uvw =$
- Zaokružiti broj ispred svakog tvrđenja koje je tačno za svako $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:
1) $|z| = 1 \Rightarrow z^{-1} = \bar{z}$
2) $|z| = |\bar{z}|$ **3)** $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ **4)** $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ **5)** $\arg z_1 = \arg z_2 \Leftrightarrow \frac{z_1}{|z_1|} = \frac{z_2}{|z_2|}$

Zadaci 1

- Za $a \in (0, \infty)$, neka je funkcija $f_a : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ definisana sa $f_a(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, i neka je $\mathcal{F} = \{f_a \mid a \in (0, \infty)\}$. (a) Dokazati da je $(\mathcal{F}, \cdot)$ komutativna grupa, gde je operacija $\cdot$ množenje funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definisano sa $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$. (b) Ispitati da li je $(\mathcal{F}, \circ)$ grupoid, gde je $\circ$ kompozicija funkcija.
- Nad poljima $\mathbb{C}$ i $\mathbb{R}$ faktorizirati polinom $p(x) = 1024x^5 + 256x^4 + 64x^3 + 16x^2 + 4x + 1$.
- Rešiti po $z \in \mathbb{C}$ jednačinu $\frac{z^2}{|z|\bar{z}} = i$.

- Ako je T težište trougla ABC , napisati $\overrightarrow{AT}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\overrightarrow{TB} = \vec{n}$ i $\overrightarrow{TC} = \vec{m}$:
 $\overrightarrow{AT} =$
- Za matrice $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$ izračunati:
 $A \cdot B =$ $\det(A) =$ $A^{-1} =$
- Za koje vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ je sistem linearnih jednačina $x + ay = 1 \wedge x + y = 0$ nad poljem realnih brojeva: **1)** kontradiktoran: **2)** neodređen: **3)** određen:
- Za vektore $\vec{a} = (2, 1, -1)$ i $\vec{b} = (-2, 3, -1)$ je:
1) $\vec{a} - 2\vec{b} =$ **2)** $|\vec{a}| =$ **3)** $\vec{a}\vec{b} =$ **4)** $\vec{a} \times \vec{b} =$
- Neka je α ravan čija je jednačina $2x - y + 3z = 2$. Napisati jedan vektor normale ravni α :
 $\vec{p} = (, ,)$ i koordinate jedne tačke ravni α : $(, ,)$.
- U 4-dimenzionalnom vektorskom prostoru, uređena 4-orka vektora (a, b, c, d) je:
1) uvek nezavisna, **2)** uvek zavisna, **3)** može biti i nezavisna i zavisna.
- U 4-dimenzionalnom vektorskom prostoru, uređena 4-orka vektora (a, b, c, d) je:
1) uvek generatorna, **2)** ne može biti generatorna, **3)** može a ne mora biti generatorna.
- Zaokružiti tvrđenja koja su tačna za bilo koje realne kvadratne matrice A, B i C reda 2:
1) $A + B = B + A$ **2)** $AB = BA$ **3)** $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$ **4)** $\det(AB) = \det(A) \det(B)$
5) $\det(A^3) = (\det(A))^3$ **6)** $\det(\alpha A) = \alpha \det(A)$ ($\alpha \in \mathbb{R}$)
- Zaokružiti funkcije koje su linearne transformacije, i za one koje jesu napisati odgovarajuću matricu:
1) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = (2x + 2y + 3z, x^2 - z^2)$:
2) $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, g(x, y) = (2x - 3y, -x + 4y)$:

Zadaci 2

- Neka je P tačka koja pripada pravoj p , a $\vec{p} \neq \vec{0}$ vektor paralelan sa pravom p . Neka tačke A i C ne pripadaju pravoj p , i neka je $\overrightarrow{AC} \cdot \vec{p} \neq 0$. (a) U zavisnosti od $\vec{r}_A, \vec{r}_C, \vec{r}_P$ i $\vec{p}$ izraziti vektor položaja vrha B jednakokrakog trougla čija je osnovica AC , a vrh B pripada pravoj p . (b) Neka je AC dijagonala romba. U zavisnosti od $\vec{r}_A, \vec{r}_C, \vec{r}_P$ i $\vec{p}$ izraziti vektore položaja preostala dva temena romba od kojih jedno pripada pravoj p .

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x + ay + z &= b^2 \\ x + ay + az &= 1 \end{aligned}$$

- Diskutovati po $a, b \in \mathbb{R}$ i rešiti po $x, y, z \in \mathbb{R}$ sistem jednačina

- Rešiti po izboru jedan od sledećih zadataka:

- Neka je $\vec{v} = (x, y, z)$, $\vec{a} = (1, -1, 2)$, $\vec{b} = (-2, 2, -4)$, i neka je linearna transformacija $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definisana sa $f(\vec{v}) = \vec{v} \times \vec{a} + \vec{v} \times \vec{b}$. (a) Ispitati da li su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ linearno nezavisni. (b) Odrediti $f(x, y, z)$, i napisati matricu linearne transformacije f .

- Dokazati da je skup rešenja $\mathcal{R}$ sistema linearnih jednačina

$$\begin{aligned} -x - y + 2z &= 0 \\ 3x + 2y - 5z &= 0 \\ -x + 2y - z &= 0 \end{aligned}$$

potprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$, i odrediti jednu bazu tog potprostora.

REŠENJA ZADATAKA

1. (a) Uočimo da za $a, b \in (0, \infty)$, odnosno $f_a, f_b \in \mathcal{F}$ važi
- [1]: $f_a \cdot f_b = f_{ab}$, jer za svako $x \in \mathbb{R}$ važi
- $$(f_a \cdot f_b)(x) = f_a(x) \cdot f_b(x) = a^x \cdot b^x = (ab)^x = f_{ab}(x).$$
- (a.1) Iz $a, b \in (0, \infty)$ sledi $ab \in (0, \infty)$, te zbog [1] sledi da je $(\mathcal{F}, \cdot)$ grupoid.
- (a.2) Asocijativnost operacije $\cdot$ u grupoidu $(\mathcal{F}, \cdot)$ sledi zbog [1]. Naime, za sve $a, b, c \in (0, \infty)$ je
- $$(f_a \cdot f_b) \cdot f_c \stackrel{[1]}{=} f_{ab} \cdot f_c \stackrel{[1]}{=} f_{(ab)c} = f_{a(bc)} \stackrel{[1]}{=} f_a \cdot f_{bc} \stackrel{[1]}{=} f_a \cdot (f_b \cdot f_c).$$
- (a.3) Komutativnost operacije $\cdot$ u grupoidu $(\mathcal{F}, \cdot)$ sledi zbog [1]. Naime, za sve $a, b \in (0, \infty)$ je
- $$f_a \cdot f_b \stackrel{[1]}{=} f_{ab} = f_{ba} \stackrel{[1]}{=} f_b \cdot f_a.$$
- (a.4) Neutralni element operacije $\cdot$ u grupoidu $(\mathcal{F}, \cdot)$ je funkcija $f_1 \in \mathcal{F}$ (jer $1 \in (0, \infty)$). Naime, za sve $a \in (0, \infty)$ iz [1] sledi $f_1 \cdot f_a \stackrel{[1]}{=} f_{1 \cdot a} = f_a$, i analogno $f_a \cdot f_1 = f_a$.
- (a.5) Inverzni element za $f_a \in \mathcal{F}$ u $(\mathcal{F}, \cdot)$ (gde je tada $a \in (0, \infty)$) je $f_{\frac{1}{a}} \in \mathcal{F}$ (jer je $\frac{1}{a} \in (0, \infty)$ za $a \in (0, \infty)$). Naime, za sve $a \in (0, \infty)$ iz [1] sledi
- $$f_{\frac{1}{a}} \cdot f_a \stackrel{[1]}{=} f_{\frac{1}{a} \cdot a} = f_1,$$
- i analogno $f_a \cdot f_{\frac{1}{a}} = f_1$.

Drugi način: Dokažimo da je struktura $(\mathcal{F}, \cdot)$ izomorfna sa komutativnom grupom $(\mathbb{R}, \cdot)$, odakle tada sledi da je i $(\mathcal{F}, \cdot)$ komutativna grupa. Neka je funkcija $\varphi : (0, \infty) \rightarrow \mathcal{F}$ definisana sa $\varphi(a) = f_a$, $a \in (0, \infty)$.

- (1) Funkcija φ je bijektivna. Naime, s jedne strane za svako $f_a \in \mathcal{F}$ postoji $a \in (0, \infty)$ gde je $\varphi(a) = f_a$, te je φ surjektivna funkcija. S druge strane, za različite $a, b \in (0, \infty)$ su različite i funkcije $\varphi(a) = f_a$ i $\varphi(b) = f_b$ jer je tada npr. $f_a(2) = a^2 \neq b^2 = f_b(2)$.
- (2) Važi $\varphi(ab) = f_a \cdot f_b$ jer je $\varphi(ab) = f_{ab} \stackrel{[1]}{=} f_a \cdot f_b$.
- (b) Iz sledećeg kontraprimera sledi da $(\mathcal{F}, \circ)$ nije grupoid. Dokažimo npr. da za $f_2 \in \mathcal{F}$ (jer $2 \in (0, \infty)$) važi $f_2 \circ f_2 \notin \mathcal{F}$. Potrebno je da dokažemo da ne postoji $a \in (0, \infty)$ takvo da je $f_2 \circ f_2 = f_a$, odnosno

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f_2 \circ f_2)(x) = f_a(x).$$

Pretpostavimo suprotno, dakle da postoji $a \in (0, \infty)$ takvo da je

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f_2 \circ f_2)(x) = f_2(f_2(x)) = 2^{2^x} = f_a(x) = a^x,$$

dakle $2^{2^x} = a^x$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Tada npr. za $x = 0$ dobijamo $2^{2^0} = a^0$ odnosno $2 = 1$, čime smo dobili kontradikciju.

2. Polinom $p(x)$ možemo posmatrati kao zbir prvih 6 članova geometrijskog niza sa prvim članom 1 i koeficijentom progresije $4x$, te primenom formule za zbir prvih 6 članova geometrijskog niza dobijamo

$$p(x) = 1 \cdot \frac{(4x)^6 - 1}{4x - 1} = \frac{4^6 x^6 - 1}{4x - 1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (4^6 x^6 - 1 = 0 \quad \wedge \quad 4x - 1 \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \left(x^6 = \frac{1}{4^6} = \frac{1}{4^6} e^{0 \cdot i} \quad \wedge \quad x \neq \frac{1}{4} \right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(x \in \sqrt[6]{\frac{1}{4^6} e^{0 \cdot i}} \quad \wedge \quad x \neq \frac{1}{4} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x \in \left\{ \sqrt[6]{\frac{1}{4^6} e^{\frac{2k\pi i}{6}}} \mid k \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\} \right\} \quad \wedge \quad x \neq \frac{1}{4} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x \in \left\{ \frac{1}{4} e^{\frac{2k\pi i}{6}} \mid k \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\} \right\} \quad \wedge \quad x \neq \frac{1}{4} \right)$$

$$\Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{1}{4} e^{-\frac{2\pi i}{3}}, \frac{1}{4} e^{-\frac{\pi i}{3}}, \frac{1}{4} e^{\frac{\pi i}{3}}, \frac{1}{4} e^{\frac{2\pi i}{3}}, -\frac{1}{4} \right\}.$$

Odavde redom dobijamo faktORIZACIJE polinoma p nad $\mathbb{C}$ i $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} p(x) &= 1024 \underbrace{\left(x - \frac{1}{4} e^{-\frac{2\pi i}{3}} \right) \left(x + \frac{1}{4} e^{\frac{2\pi i}{3}} \right) \left(x - \frac{1}{4} e^{-\frac{\pi i}{3}} \right) \left(x + \frac{1}{4} e^{\frac{\pi i}{3}} \right)}_{\left(x^2 - \frac{2}{4} \cos \frac{2\pi}{3} x + \frac{1}{16} \right) \left(x^2 - \frac{2}{4} \cos \frac{\pi}{3} x + \frac{1}{16} \right)} \left(x + \frac{1}{4} \right) \\ &= 1024 \left(x^2 - \frac{2}{4} \cos \frac{2\pi}{3} x + \frac{1}{16} \right) \left(x^2 - \frac{2}{4} \cos \frac{\pi}{3} x + \frac{1}{16} \right) \left(x + \frac{1}{4} \right) \\ &= 1024 \left(x^2 + \frac{1}{4} x + \frac{1}{16} \right) \left(x^2 - \frac{1}{4} x + \frac{1}{16} \right) \left(x + \frac{1}{4} \right). \end{aligned}$$

3. Jednačina nije definisana za $z = 0$. Za $z \neq 0$, smenom $z = \rho e^{i\varphi}$, $\rho > 0$, $\varphi \in [-\pi, \pi)$ dobijamo

$$\frac{z^2}{|z|\bar{z}} = i \Leftrightarrow \frac{\rho^2 e^{i2\varphi}}{\rho \cdot \rho e^{-i\varphi}} = e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow e^{i3\varphi} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\rho \in (0, \infty) \wedge 3\varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\rho \in (0, \infty) \wedge \varphi = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi = \frac{(1+4k)\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \right)$$

$$\Leftrightarrow z \in \left\{ \rho e^{-\frac{\pi}{2}i} \mid \rho \in (0, \infty) \right\} \cup \left\{ \rho e^{\frac{\pi}{6}i} \mid \rho \in (0, \infty) \right\} \cup \left\{ \rho e^{\frac{5\pi}{6}i} \mid \rho \in (0, \infty) \right\}$$

$$\Leftrightarrow z \in \{ \rho i \mid \rho \in (0, \infty) \} \cup \left\{ \rho e^{\frac{\pi}{6}i} \mid \rho \in (0, \infty) \right\} \cup \left\{ \rho e^{\frac{5\pi}{6}i} \mid \rho \in (0, \infty) \right\}.$$

4. (a) Neka je S sredina duži AC , dakle $\vec{r}_S = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_C)$, i neka je α simetralna ravan duži AC . Ravan α tada sadrži tačku S a $\vec{AC}$ je njen vektor normale. Kako je ABC jednakokraki trougao sa vrhom u B , sledi da tačka B leži u ravni α . Dakle, $B = p \cap \alpha$, te je $\vec{r}_B = \vec{r}_P + \frac{(\vec{r}_S - \vec{r}_P) \cdot \vec{AC}}{\vec{AC} \cdot \vec{p}} \vec{p}$.
- (b) Tačka B iz dela (a) zadatka je upravo jedno teme traženog romba $ABCD$, a tačka S iz (a) je presek njegovih dijagonala. Stoga iz $\vec{BS} = \vec{SD}$ sledi $\vec{r}_D = \vec{r}_S + \vec{r}_S - \vec{r}_B = 2\vec{r}_S - \vec{r}_B$.

5. Nakon što prvu jednačinu oduzmemo od druge i treće, a zatim drugu oduzmemo od treće, dobijamo ekvivalentan sistem

$$\begin{array}{rclcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & (a-1)y & & & = & b^2 - 1, \\ & & & & (a-1)z & = & 1 - b^2 \end{array} \quad \text{odakle sledi}$$

$$(1) \text{ za } a \neq 1 \text{ je sistem određen, i skup rešenja je } R_S = \left\{ \left(1, \frac{1-b^2}{a-1}, \frac{b^2-1}{a-1} \right) \right\};$$

(2) za $a = 1$ je sistem ekvivalentan sa

$$\begin{array}{rcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & 0 & = & b^2 - 1 \end{array} \quad \text{te imamo podslučajeve:}$$

(2.1) za $b \notin \{-1, 1\}$ je sistem kontradiktoran ($R_S = \emptyset$);

(2.2) za $b \in \{-1, 1\}$ je sistem ekvivalentan sa $x + y + z = 1$, te je 2 puta neodređen i skup rešenja mu je $R_S = \{ (1 - \alpha - \beta, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$.

6. (1) (a) Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su linearno zavisni jer je $\vec{b} = -2\vec{a}$.

$$(b) \vec{v} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (2y + z, -2x + z, -x - y),$$

$$\vec{v} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ -2 & 2 & -4 \end{vmatrix} = \vec{v} \times (-2\vec{a}) = -2(\vec{v} \times \vec{a})$$

$$= (-4y - 2z, 4x - 2z, 2x + 2y),$$

$$f(x, y, z) = (2y + z, -2x + z, -x - y) + (-4y - 2z, 4x - 2z, 2x + 2y)$$

$$= (-2y - z, 2x - z, x + y),$$

$$M_f = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(2) Nakon što prvu jednačinu pomnoženu sa 3 dodamo na drugu, prvu jednačinu oduzmemo od treće, a zatim drugu jednačinu pomnoženu sa 3 dodamo na treću, dobijamo ekvivalentan sistem

$$\begin{array}{rclcl} -x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ & & - & y & + & z & = & 0 \end{array}$$

čiji je skup rešenja

$$\mathcal{R} = \{(\alpha, \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(1, 1, 1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \text{Lin}\{(1, 1, 1)\}.$$

Sledi da je $\mathcal{R}$, kao lineal, potprostora $\mathbb{R}^3$ (teorema). Jedna baza mu je $\{(1, 1, 1)\}$ jer je, kao lineal nad $(1, 1, 1)$, skup $\mathcal{R}$ generisan sa $(1, 1, 1)$, a vektor $(1, 1, 1) \neq \vec{0}$ je i linearno nezavisan.