

- Zaokružiti koje od osobina Refleksivnosti, Simetričnosti, Antisimetričnosti i Tranzitivnosti ima relacija $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 4), (1, 3), (3, 1)\}$ u skupu $\{1, 2, 3, 4\}$: R S A T
- Neka su funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definisane sa $f(x) = 3x + 2$ i $g(x) = 2x - 3$. Tada je:
 $(f \circ g)(x) =$ $(g \circ f)(x) =$ $f^{-1}(x) =$
- Neka je f funkcija definisana sa $f = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix}$. Tada je
 $f^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}$, $f \circ f = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}$, $f \circ f^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}$.
- Funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x^2}$ je:
1) surjektivna 2) injektivna 3) niti injektivna niti surjektivna
- U Bulovoj algebri $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$ su tačna tvrđenja (zaokružiti):
1) $a \cdot (a + b) = a$ 2) $a + 0 = a$ 3) $a + 0 = 1$ 4) $a + 0 = a'$ 5) $1 + 0 = 1$
6) $a(a' + 0) = 0$ 7) $a + b = b + a$
- Od sledećih struktura, grupoidi sa neutralnim elementom su (zaokružiti):
1) $(\mathbb{Z}, +)$ 2) $(\mathbb{Z}, \cdot)$ 3) $(\{-1, 0, 1\}, \cdot)$ 4) $(\mathbb{R}, +)$ 5) $(\mathbb{C}, +)$ 6) $(\mathbb{Z}_4, +)$ 7) $(\mathbb{Z}_4, \cdot)$
- Od sledećih struktura, prsteni su (zaokružiti):
1) $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ 2) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ 3) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ 4) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ 5) $(\mathbb{C}, +, \cdot)$
- Ako je $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 3i$, tada je:
 $z_1 + z_2 =$ $z_1 \cdot z_2 =$ $\frac{z_1}{z_2} =$ $\arg(z_1) =$ $\arg(z_2) =$
- Neka je $p \in \mathbb{C}[x]$ (polinom nad poljem kompleksnih brojeva) stepena $\deg(p) = n \geq 2$. Zaokružiti broj ispred svakog tvrđenja koje je tačno za svako $z, w \in \mathbb{C}$: 1) $\deg(p + p) = 2n$ 2) $\deg(p + p) = n$
3) $\deg(p \cdot p) = 2n$ 4) $\deg(p \cdot p) = n$ 5) $p(z) = 0 \Rightarrow p(\bar{z}) = 0$ 6) $p(z + w) = p(z) + p(w)$
- Zaokružiti polja nad kojima je polinom $t^3 + 1$ svodljiv: $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$ $\mathbb{Z}_2$ $\mathbb{Z}_3$
- Navesti geometrijsku interpretaciju skupova A_i :
 $A_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 9\}$ _____
 $A_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \arg |z| = \frac{\pi}{6}\}$ je _____
 $A_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid \arg z = \frac{\pi}{6}\}$ _____

Zadaci 1

- Neka su funkcije $f, g, h, u: \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ definisane sa
 $f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
(a) Popuniti Kejljevu tablicu za strukturu $(A, \circ)$, gde je $A = \{f, g, h, u\}$, a $\circ$ je kompozicija funkcija.
(b) Ispitati sve aksiome Abelove grupe za strukturu $(A, \circ)$.
- Rešiti po $z, w \in \mathbb{C}$ sistem jednačina: $z^3 + 3w = 0 \wedge 4w + 5\bar{w} + 9i = 0$.
- Nad poljima $\mathbb{C}$ i $\mathbb{R}$ faktorizovati polinom $p(x) = 1024x^5 + 256x^4 + 64x^3 + 16x^2 + 4x + 1$.

- Ako je T težište trougla ABC , napisati $\overrightarrow{AT}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\overrightarrow{TB} = \vec{n}$ i $\overrightarrow{TC} = \vec{m}$:
 $\overrightarrow{AT} =$
- Ako je tačka T prodor prave $\vec{r} = \vec{r}_P + t\vec{p}$ kroz ravan $\vec{n}(\vec{r} - \vec{r}_N) = 0$, tada je: $\vec{r}_T =$
- Za vektore $\vec{a} = (-2, -3, 1)$ i $\vec{b} = (4, 2, -5)$ je: **1)** $|\vec{a}| =$ **2)** $\vec{a}\vec{b} =$ **3)** $\vec{a} \times \vec{b} =$
- U vektorskom prostoru slobodnih vektora, uređeni par vektora (a, b) je: **1)** uvek nezavisan, **2)** uvek zavisao, **3)** može biti i nezavisan i zavisao.
- U vektorskom prostoru slobodnih vektora, uređeni par vektora (a, b) je: **1)** uvek generatoran, **2)** nikad generatoran, **3)** može a ne mora biti generatoran.
- Izračunati: $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} =$ $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} =$
- Karakteristični polinom matrice $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ je: _____
- Koji od vektora su karakteristični vektori za matricu $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$: **1)** $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ **2)** $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ **3)** $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$
- Koje od tvrđenja je tačno za bilo koje kvadratne matrice A, B i C reda 2: **1)** $\det(A^2) = (\det(A))^2$ **2)** $\det(\alpha A) = \alpha \det(A)$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) **3)** $AB = BA$ **4)** $A(BC) = (AB)C$ **5)** $\text{rang } A > 0$ **6)** $\text{rang } A = 2 \Leftrightarrow \exists A^{-1}$ **7)** $\det A = 0 \Leftrightarrow \exists A^{-1}$ **8)** $(A+B)^{-1} = B^{-1} + A^{-1}$ (ako sve navedene matrice postoje) **9)** $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$ **10)** $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- Neka $A \sim B$ znači da su matrice A i B ekvivalentne. Tada važi: **1)** $A \sim B \Rightarrow |\det(A)| = |\det(B)|$ **2)** $A \sim B \Leftrightarrow |\det(A)| = |\det(B)|$ **3)** $\det(A) = \det(B) \Rightarrow A \sim B$ **4)** $A \sim B \Rightarrow \det(A) = \det(B)$ **5)** $A \sim B \Rightarrow (\det(A) = 0 \Leftrightarrow \det(B) = 0)$ **6)** $A \sim B \Leftrightarrow (\text{rang}(A) = 0 \Leftrightarrow \text{rang}(B) = 0)$
- Ako je $f: V \rightarrow W$ izomorfizam prostora V i W nad poljem F , tada je: **1)** $f(0) = 0$ **2)** $f(-x) = -x$ za svako $x \in V$ **3)** $f(\lambda v) = f(\lambda) + f(v)$ za svako $\lambda \in F$ i svako $v \in V$ **4)** $f(u+v) = f(u) + f(v)$ za sve $u, v \in V$ **5)** $\dim V = \dim W$ **6)** postoji $f^{-1}: W \rightarrow V$, i f^{-1} je izomorfizam
- Za koje vrednosti parametara $a, b \in \mathbb{R}$ su navedene funkcije linearne transformacije, i za one koje jesu, napisati odgovarajuću matricu i diskutovati (po $a, b \in \mathbb{R}$) njen rang:
1) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x + y + z + a + bxyz$:
2) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(x) = (x^a, ax + b)$:
- Za koje vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ je sistem linernih jednačina $x + y = a \wedge x + ay = 0$ nad poljem realnih brojeva: **1)** kontradiktoran: **2)** neodređen: **3)** određen:

Zadaci 2

- Prava p je određena tačkom P i vektorom pravca $\vec{p}$, tačke A i B ne pripadaju pravoj p , i $\overrightarrow{AB} \not\perp \vec{p}$. U zavisnosti od $\vec{r}_A, \vec{r}_B, \vec{r}_P$ i $\vec{p}$, izraziti vektore položaja tačaka C i D takvih da $C \in p$, i $ABCD$ je pravougaonik kojem je AC dijagonala.
- U zavisnosti od realnih parametara $a, b \in \mathbb{R}$ diskutovati i rešiti sistem jednačina: $\begin{matrix} ax & + & by & = & 1 \\ bx & + & by & = & a \end{matrix}$
- Neka je prava p prolazi kroz koordinatni početak, i neka je paralelna sa vektorom $\vec{p} = (1, 1, -2)$. Neka je funkcija $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ projekcija tačaka $\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ na pravu p . Izračunati analitički izraz $f(\vec{v}) = f(x, y, z)$ koji definiše linearnu transformaciju f , napisati matricu M_f linearne transformacije f , i izračunati $\text{rang } M_f$.

REŠENJA ZADATAKA

1. (a) Kejljevu tablicu popunjavamo izračunavanjem kompozicija funkcija. Npr. iz

$$(g \circ h)(0) = g(h(0)) = g(2) = 3, \quad (g \circ h)(1) = g(h(1)) = g(3) = 0,$$

$$(g \circ h)(2) = g(h(2)) = g(0) = 1, \quad (g \circ h)(3) = g(h(3)) = g(1) = 2$$

sledi $g \circ h = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = u$, te tako dobijamo

$\circ$	f	g	h	u
f	f	g	h	u
g	g	h	u	f
h	h	u	f	g
u	u	f	g	h

- (b) Iz tablice vidimo da je operacija $\circ$ zatvorena na skupu $A = \{f, g, h, u\}$. Kompozicija funkcija je asocijativna operacija (teorema). Neutralni element je identička funkcija f (vrsta i kolona su joj jednake graničnoj vrsti i koloni). Iz tablice vidimo da je $f^{-1} = f$, $g^{-1} = u$, $h^{-1} = h$ i $u^{-1} = g$. Kako je tablica simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu, sledi da je operacija $\circ$ komutativna na skupu $A = \{f, g, h, u\}$.

2. Rešimo najpre jednačinu $4w + 5\bar{w} + 9i = 0$. Smenom $w = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ dobijamo

$$4w + 5\bar{w} + 9i = 0 \Leftrightarrow (w = x + iy \wedge 4(x + iy) + 5(x - iy) + 9i = 0)$$

$$\Leftrightarrow (w = x + iy \wedge 9x - i(y + 9) = 0)$$

$$\Leftrightarrow (w = x + iy \wedge 9x = 0 \wedge y + 9 = 0) \Leftrightarrow w = -9i.$$

Dalje je

$$z^3 + 3w = 0 \Leftrightarrow z^3 = 27i = 27e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\Leftrightarrow z \in \sqrt[3]{27e^{i\frac{\pi}{2}}} = \left\{ 3e^{i\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}} \mid k \in \{-1, 0, 1\} \right\} = \left\{ 3e^{-i\frac{\pi}{2}}, 3e^{i\frac{\pi}{6}}, 3e^{i\frac{5\pi}{6}} \right\} = \left\{ -3i, 3e^{i\frac{\pi}{6}}, 3e^{i\frac{5\pi}{6}} \right\}.$$

3. Polinom $p(x)$ možemo posmatrati kao zbir prvih 6 članova geometrijskog niza sa prvim članom 1 i koeficijentom progresije $4x$, te primenom formule za zbir prvih 6 članova geometrijskog niza dobijamo

$$p(x) = 1 \cdot \frac{(4x)^6 - 1}{4x - 1} = \frac{4^6 x^6 - 1}{4x - 1} = 0 \Leftrightarrow (4^6 x^6 - 1 = 0 \wedge 4x - 1 \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \left(x^6 = \frac{1}{4^6} = \frac{1}{4^6} e^{0 \cdot i} \wedge x \neq \frac{1}{4} \right) \Leftrightarrow \left(x \in \sqrt[6]{\frac{1}{4^6} e^{0 \cdot i}} \wedge x \neq \frac{1}{4} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x \in \left\{ \sqrt[6]{\frac{1}{4^6} e^{\frac{2k\pi i}{6}}} \mid k \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\} \right\} \wedge x \neq \frac{1}{4} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x \in \left\{ \frac{1}{4} e^{\frac{2k\pi i}{6}} \mid k \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\} \right\} \wedge x \neq \frac{1}{4} \right)$$

$$\Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{1}{4} e^{-\frac{2\pi i}{3}}, \frac{1}{4} e^{-\frac{\pi i}{3}}, \frac{1}{4} e^{\frac{\pi i}{3}}, \frac{1}{4} e^{\frac{2\pi i}{3}}, -\frac{1}{4} \right\}.$$

Oдавde redom dobijamo faktORIZACIJE polinoma p nad $\mathbb{C}$ i $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} p(x) &= 1024 \underbrace{\left(x - \frac{1}{4} e^{-\frac{2\pi i}{3}} \right) \left(x + \frac{1}{4} e^{\frac{2\pi i}{3}} \right)}_{\left(x^2 - \frac{2}{4} \cos \frac{2\pi}{3} x + \frac{1}{16} \right)} \underbrace{\left(x - \frac{1}{4} e^{-\frac{\pi i}{3}} \right) \left(x + \frac{1}{4} e^{\frac{\pi i}{3}} \right)}_{\left(x^2 - \frac{2}{4} \cos \frac{\pi}{3} x + \frac{1}{16} \right)} \left(x + \frac{1}{4} \right) \\ &= 1024 \left(x^2 - \frac{2}{4} \cos \frac{2\pi}{3} x + \frac{1}{16} \right) \left(x^2 - \frac{2}{4} \cos \frac{\pi}{3} x + \frac{1}{16} \right) \left(x + \frac{1}{4} \right) \\ &= 1024 \left(x^2 + \frac{1}{4} x + \frac{1}{16} \right) \left(x^2 - \frac{1}{4} x + \frac{1}{16} \right) \left(x + \frac{1}{4} \right). \end{aligned}$$

4. Kako je $BC \perp AB$, tačka C pripada ravni α koja sadrži tačku B i koja je ortogonalna na AB . Dakle, $B \in \alpha$ i $\overrightarrow{AB} \perp \alpha$. Stoga za tačku važi $C = p \cap \alpha$, te je

$$\vec{r}_C = \vec{r}_P + \frac{(\vec{r}_B - \vec{r}_P)\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AB}\vec{p}}\vec{p}.$$

Iz $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$ tj. $\vec{r}_D - \vec{r}_C = \vec{r}_A - \vec{r}_B$ sledi da je $\vec{r}_D = \vec{r}_C + \vec{r}_A - \vec{r}_B$.

5. Oduzimanjem prve od druge jednačine dobijamo

$$\begin{array}{rcl} ax & + & by = 1 \\ bx & + & by = a \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} ax & + & by = 1 \\ (b-a)x & & = a-1 \end{array},$$

odakle sledi sledeća diskusija:

(1) za $b \neq 0$ i $b \neq a$ sistem je određen, i $R_S = \left\{ \left(\frac{a-1}{b-1}, \frac{1}{b} \left(1 - a \frac{a-1}{b-1} \right) \right) \right\};$

(2) za $a = b = 0$ sistem je kontradiktoran, tj. $R_S = \emptyset$, jer je ekvivalentan sa sistemom $0 = 1 \wedge 0 = -1$;

(3) za $b = a \neq 0$ imamo $\begin{array}{rcl} ax & + & ay = 1 \\ 0 & = & a-1 \end{array}$ te imamo podslučajeve:

(3.1) za $b = a \notin \{0, 1\}$ je sistem kontradiktoran;

(3.2) za $b = a = 1$ je sistem ekvivalentan sa $x + y = 1$, te je jedan puta neodređen i $R_S = \{(\alpha, 1 - \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\};$

(4) za $b = 0$ i $a \neq 0$ imamo $\begin{array}{rcl} ax & = & 1 \\ -ax & = & a-1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} ax & = & 1 \\ 0 & = & a \end{array}$, te je sistem u ovom slučaju kontradiktoran.

6. Primenom formule za ortogonalnu projekciju tačke $\vec{v} = (x, y, z)$ na pravu p dobijamo

$$\begin{aligned} f(\vec{v}) &= f(x, y, z) = \vec{r}_O + \frac{(\vec{v} - \vec{r}_O)\vec{p}}{\vec{p}\vec{p}}\vec{p} \\ &= (0, 0, 0) + \frac{((x, y, z) - (0, 0, 0))(1, 1, -2)}{(1, 1, -2)(1, 1, -2)}(1, 1, -2) \\ &= \frac{(x, y, z)(1, 1, -2)}{6}(1, 1, -2) = \frac{x + y - 2z}{6}(1, 1, -2) \\ &= \left(\frac{1}{6}x + \frac{1}{6}y - \frac{2}{6}z, \frac{1}{6}x + \frac{1}{6}y - \frac{2}{6}z, -\frac{2}{6}x - \frac{2}{6}y + \frac{4}{6}z \right). \end{aligned}$$

Matrica ove linearne transformacije je $M_f = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{2}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{2}{6} \\ -\frac{2}{6} & -\frac{2}{6} & \frac{4}{6} \end{bmatrix}.$

Nako što se prva vrsta matrice oduzme od druge, i prva vrsta pomnožena sa 2 doda trećoj, dobijamo

$$M_f \sim \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{2}{6} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

odakle sledi da je $\text{rang } M_f = 1$.