

MATEMATIČKA ANALIZA 1 - dodatak

Ljubo Nedović

21. decembar 2025

1 Funkcije rastojanja, metrike i norme

2 Pomoćna tvrđenja i nizovi

Navedena tvrđenja se mogu naći u [1, 2, 3].

Lema 2.1 (Bernoulli-jeva nejednakost) *Za svako $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ i svaki realan broj $h > -1$ važi*

$$(1 + h)^n \geq 1 + nh. \quad (1)$$

◁

Dokaz: Dokaz sledi primenom principa matematičke indukcije.

- Za $n = 0$ očigledno dobijamo $(1 + h)^0 = 1 \geq 1 + 0$.

- Pretpostavimo da za $n = k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ važi $(1 + h)^k \stackrel{[*]}{\geq} 1 + kh$.

- Koristeći induktivnu pretpostavku, za $n = k + 1$ dobijamo

$$\begin{aligned} (1 + h)^{k+1} &= (1 + h)^k (1 + h) \stackrel{[*]}{\geq} (1 + kh) (1 + h) = 1 + (k + 1)h + kh^2 \\ &\geq 1 + (k + 1)h. \end{aligned} \quad \square$$

Sledeća teorema je poznata kao *Stolz-ova* ili *Stolz-Cesáro-va* teorema, vidi [1, 2, 3]. Ona za realne nizove predstavlja analogon *L'Hospital-ove* teoreme. Najpre slede opštije verzije, a na kraju verzija Stolz-ove teoreme koja je najpoznatija u literaturi i koja se često primenjuje pri izračunavanju graničnih vrednosti nizova.

Theorema 2.1 (Stolz-ova teorema) *Neka je a_i , $i \in \mathbb{N}$ proizvoljan niz realnih brojeva, i neka je b_i , $i \in \mathbb{N}$ niz pozitivnih realnih brojeva za koji važi*

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_i = \infty.$$

(a) *Za nizove a_i , $i \in \mathbb{N}$ i b_i , $i \in \mathbb{N}$ važe nejednakosti*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\sum_{i=1}^n b_i} \leq \limsup_{i \rightarrow \infty} \frac{a_i}{b_i} \quad (2)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\sum_{i=1}^n b_i} \geq \liminf_{i \rightarrow \infty} \frac{a_i}{b_i} \quad (3)$$

(b) *Dodatno, ukoliko postoji $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{a_i}{b_i}$, tada je*

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{a_i}{b_i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\sum_{i=1}^n b_i} \quad (4)$$

◁

Dokaz:

(a) Dokazujemo redom nejednakosti (2) i (3).

(1) Za svako $m \in \mathbb{N}$ označimo $A_m = \sum_{i=1}^m a_i$ i $B_m = \sum_{i=1}^m b_i$.

U slučaju kada je $\limsup_{i \rightarrow \infty} \frac{a_i}{b_i} = \infty$, nejednakost (2) je trivijalno zadovoljena. Neka je $G = \limsup_{i \rightarrow \infty} \frac{a_i}{b_i} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Posmatrajmo proizvoljno $g > G$. Po definiciji vrednosti $\limsup$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takvo da je $\frac{a_n}{b_n} < g$ za sve $n > n_0$, odnosno $a_n < gb_n$ za sve $n > n_0$ (članovi niza b_i , $i \in \mathbb{N}$ su pozitivni realni brojevi). Koristeći poslednje nejednakosti, za svako $n > n_0$ dobijamo

$$\begin{aligned} A_n &= a_1 + \cdots + a_{n_0} + a_{n_0+1} + \cdots + a_n \\ &\leq a_1 + \cdots + a_{n_0} + gb_{n_0+1} + \cdots + gb_n \\ &= a_1 + \cdots + a_{n_0} + g(b_{n_0+1} + \cdots + b_n) \\ &= A_{n_0} + g(B_n - B_{n_0}). \end{aligned}$$

Kako su svi članovi niza b_i , $i \in \mathbb{N}$ pozitivni, sledi da je i $B_m > 0$ za sve $m \in \mathbb{N}$, te iz poslednje nejednakosti $A_n \leq A_{n_0} + g(B_n - B_{n_0})$, $n > n_0$ dalje dobijamo

$$\frac{A_n}{B_n} \leq \frac{A_{n_0} + g(B_n - B_{n_0})}{B_n} = \frac{gB_n + A_{n_0} - gB_{n_0}}{B_n} = g + \frac{A_{n_0} - gB_{n_0}}{B_n}$$

Za fiksno $n_0 \in \mathbb{N}$ je $A_{n_0} - gB_{n_0} \in \mathbb{R}$ (konačan broj) a po pretpostavci

je $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} b_i = \infty$, te primenom $\limsup_{n \rightarrow \infty}$ na poslednju

nejednakost dobijamo da je

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{B_n} &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(g + \frac{A_{n_0} - gB_{n_0}}{B_n} \right) \\ &= g + \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{A_{n_0} - gB_{n_0}}{B_n} \right) = g + 0 = g \end{aligned}$$

Kako ova nejednakost $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\sum_{i=1}^n b_i} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{B_n} \leq g$ važi za svako

$g > G$, sledi da je

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\sum_{i=1}^n b_i} \leq G = \limsup_{i \rightarrow \infty} \frac{a_i}{b_i}$$

što je i trebalo dokazati.

- (2) Slučaj $\liminf_{i \rightarrow \infty} \frac{a_i}{b_i} = -\infty$ je trivijalan, a u slučaju $\liminf_{i \rightarrow \infty} \frac{a_i}{b_i} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ dokaz nejednakosti (3) izvodimo primenom nejednakosti (2). Naime, ako u nejednakosti (2) umesto niza a_i , $i \in \mathbb{N}$ posmatramo niz $-a_i$, $i \in \mathbb{N}$, dobijamo

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n (-a_i)}{\sum_{i=1}^n b_i} &\leq \limsup_{i \rightarrow \infty} \frac{-a_i}{b_i} \\ \Rightarrow \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\sum_{i=1}^n b_i} \right) &\leq \limsup_{i \rightarrow \infty} \left(-\frac{a_i}{b_i} \right) \\ \Rightarrow \quad -\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\sum_{i=1}^n b_i} &\leq -\liminf_{i \rightarrow \infty} \frac{a_i}{b_i} \\ \Rightarrow \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\sum_{i=1}^n b_i} &\geq \liminf_{i \rightarrow \infty} \frac{a_i}{b_i}. \end{aligned}$$

- (b) Dokaz sledi iz nejednakosti (2) i (3). □

Sledi teorema koja je ekvivalentna teoremi 2.1, a čiji se deo (b), kao i posledica 2.3 često koristi pri izračunavanju graničnih vrednosti nizova.

Theorema 2.2 (Stolz-ova teorema) *Neka je a_i , $i \in \mathbb{N}$ proizvoljan niz realnih brojeva, i neka je b_i , $i \in \mathbb{N}$ strogo monotono rastući niz realnih brojeva za koji važi $\lim_{i \rightarrow \infty} b_i = \infty$.*

- (a) *Za nizove a_i , $i \in \mathbb{N}$ i b_i , $i \in \mathbb{N}$ važe nejednakosti*

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} \frac{a_i}{b_i} \leq \limsup_{i \rightarrow \infty} \frac{a_{i+1} - a_i}{b_{i+1} - b_i} \quad (5)$$

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} \frac{a_i}{b_i} \geq \liminf_{i \rightarrow \infty} \frac{a_{i+1} - a_i}{b_{i+1} - b_i} \quad (6)$$

(b) *Dodatno, ukoliko postoji $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{a_{i+1} - a_i}{b_{i+1} - b_i}$, tada je*

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{a_i}{b_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{a_{i+1} - a_i}{b_{i+1} - b_i} \quad (7)$$

◁

Dokaz: Neka su nizovi $x_i, i \in \mathbb{N}$ i $y_i, i \in \mathbb{N}$ definisani sa

$$x_1 = a_1, \quad x_i = a_i - a_{i-1}, \quad i \geq 2, \quad [1]$$

$$y_1 = b_1, \quad y_i = b_i - b_{i-1}, \quad i \geq 2. \quad [2]$$

Pri tome je tada

$$\sum_{i=1}^n x_i = a_1 + \sum_{i=2}^n (a_i - a_{i-1}) = a_n, \quad [3]$$

$$\sum_{i=1}^n y_i = b_1 + \sum_{i=2}^n (b_i - b_{i-1}) = b_n, \quad [4]$$

za sve $n \in \mathbb{N}$. Dodatno, kako je niz $b_i, i \in \mathbb{N}$ strogo monotono rastući, sledi da je $y_i = b_i - b_{i-1} > 0$ za sve $i \geq 2$. Pri tome je i $\lim_{i \rightarrow \infty} b_i = \infty$ te sa $b_0 = 0$ dobijamo

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} y_i &= b_1 + \sum_{i=2}^{\infty} (b_i - b_{i-1}) = \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - b_{i-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (b_i - b_{i-1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - b_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n - 0 = \infty. \end{aligned}$$

Dakle, $x_i, i \in \mathbb{N}$ je proizvoljan niz realnih brojeva, a $y_i, i \in \mathbb{N}$ je niz pozitivnih realnih brojeva (osim eventualno prvog člana) za koji važi $\sum_{i=1}^{\infty} y_i = \infty$. Stoga se na nizove $x_i, i \in \mathbb{N}$ i $y_i, i \in \mathbb{N}$ može primeniti teorema 2.1.

(a) Primenom nejednakosti (2) dobijamo nejednakost (5):

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n y_i} \leq \limsup_{i \rightarrow \infty} \frac{x_i}{y_i} \quad [3],[4],[1],[2] \quad \Leftrightarrow \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \leq \limsup_{i \rightarrow \infty} \frac{a_i - a_{i-1}}{b_i - b_{i-1}}.$$

Primenom nejednakosti (3) dobijamo nejednakost (6):

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n y_i} \geq \liminf_{i \rightarrow \infty} \frac{x_i}{y_i} \quad [3],[4],[1],[2] \quad \Leftrightarrow \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \geq \liminf_{i \rightarrow \infty} \frac{a_i - a_{i-1}}{b_i - b_{i-1}}.$$

(b) Ako postoji $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{a_{i+1} - a_i}{b_{i+1} - b_i} \stackrel{[1],[2]}{=} \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{x_{i+1}}{y_{i+1}}$, primenom (4) na nizove $x_i, i \in \mathbb{N}$ i $y_i, i \in \mathbb{N}$ dobijamo (7):

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{x_i}{y_i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n y_i} \quad [1],[2],[3],[4] \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{a_i - a_{i-1}}{b_i - b_{i-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}. \quad \square$$

Theorema 2.3 (Stolz–ova teorema) *Neka je a_i , $i \in \mathbb{N}$ proizvoljan niz realnih brojeva, i neka je b_i , $i \in \mathbb{N}$ strogo monotono opadajući niz realnih brojeva za koji važi $\lim_{n \rightarrow \infty} b_i = -\infty$. Ukoliko postoji granična vrednost $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$, tada je*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \quad (8) \quad \triangleleft$$

Dokaz: Primenom teoreme 2.2 na nizove a_i , $i \in \mathbb{N}$ i $\bar{b}_i = -b_i$, $i \in \mathbb{N}$, gde je $\bar{b}_i$, $i \in \mathbb{N}$ strogo monotono rastući niz realnih brojeva za koji važi $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{b}_i = \infty$. $\square$

Kao posledicu teoreme 2.2 sa nizom $b_i = 1$, $i \in \mathbb{N}$ dobijamo sledeće tvrđenje.

Posledica 2.1 *Za svaki niz realnih brojeva a_i , $i \in \mathbb{N}$ važe sledeće relacije:*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} \leq \limsup_{i \rightarrow \infty} a_i, \quad (9)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} \geq \liminf_{i \rightarrow \infty} a_i, \quad (10)$$

i ukoliko postoji $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i$, tada je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} \geq \lim_{i \rightarrow \infty} a_i. \quad (11) \quad \triangleleft$$

„Multiplikativna” verzija Stolz–ove teoreme je Cesaro-ova teorema.

Theorema 2.4 (Cesaro-ova teorema) *Neka je a_i , $i \in \mathbb{N}$ proizvoljan niz pozitivnih realnih brojeva. Tada važe nejednakosti*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i} \leq \limsup_{i \rightarrow \infty} a_i, \quad (12)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i} \geq \liminf_{i \rightarrow \infty} a_i, \quad (13)$$

Dodatno, ukoliko postoji $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i$, tada je

$$\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}. \quad (14)$$

◁

Dokaz: Neka je $b_i = \ln a_i$, $i \in \mathbb{N}$. Tada je $a_i = e^{b_i}$, $i \in \mathbb{N}$ i dobijamo

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n e^{b_i}} = \sqrt[n]{e^{\sum_{i=1}^n b_i}} = e^{\frac{\sum_{i=1}^n b_i}{n}}.$$

Primenom teoreme 2.1 na prethodnu jednakost dobijamo redom 12, 13 i 14. ◻

Analogno, primenom teoreme 2.2 dobijamo ekvivalentnu verziju teoreme 2.4.

Theorema 2.5 (Cesaro-ova teorema) *Neka je a_i , $i \in \mathbb{N}$ proizvoljan niz pozitivnih realnih brojeva. Tada važe nejednakosti*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{i \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}, \quad (15)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \geq \liminf_{i \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}, \quad (16)$$

Dodatno, ukoliko postoji $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{a_i}{a_{i-1}}$, tada je

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sqrt[i]{a_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{a_i}{a_{i-1}}. \quad (17)$$

◁

Literatura

- [1] Slobodan Aljančić. *Uvod u realnu i funkcionalnu analizu*. Građevinska knjiga, Beograd, 2011.
- [2] Milan Merkle. *Matematička analiza: teorija i hiljadu zadataka – za studente tehnike*. Akademska misao, Beograd, 2015.
- [3] Dragoslav S. Mitrinović and Dusan D. Adamović. *Nizovi i redovi: definicije, stavovi, zadaci, problemi*. Matematički problemi i ekspozicije. Naučna knjiga, Beograd, 1971.