

TEORIJA (ZA VISOKU OCENU)

1. Napisati definiciju granične vrednosti $A \in \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ u tački $x_0 \in \mathbb{R}$.

2. Od sledeća dva pitanja birati jedno.

(a) Dokazati:

Ako za nizove realnih brojeva $a_n, n \in \mathbb{N}, b_n, n \in \mathbb{N}$ i $c_n, n \in \mathbb{N}$ važi $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq b_n \leq c_n$, tada

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = p \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = p.$$

(b) Dokazati:

Neka funkcija $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ u tački $M \in \mathbb{R}^n$ ima lokalnu ekstremnu vrednost. Ako funkcija f u tački $M \in \mathbb{R}^n$ ima sve prve parcijalne izvode $\frac{\partial f}{\partial x_i}(M), i \in \{1, \dots, n\}$, tada je $\frac{\partial f}{\partial x_i}(M) = 0$ za sve $i \in \{1, \dots, n\}$.

3. Od sledeća dva pitanja birati jedno.

(a) Dokazati:

Neka za funkcije $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ i $g : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ postoje $\int_a^b f(x)dx$ i $\int_a^b g(x)dx$, i neka postoje $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x) \in \mathbb{R}$ i $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x) \in \mathbb{R}$. Tada postoji $T \in [m, M]$ takvo da je

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = T \int_a^b g(x)dx.$$

(b) Dokazati:

Formulisati uslove dovoljne da diferencijalna jednačina

$$P(x, y) + y' Q(x, y) = 0$$

bude jednačina totalnog diferencijala, i opisati postupak njenog rešavanja.

ZADACI

1. Ispitati monotonost i lokalne ekstreme funkcije $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

2. Izračunati $I = \int \frac{x+5}{x^2-2x} dx$.

3. Odrediti ekstreme funkcije $z = f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 5xy - 3x - y$.