Elektrotehnički odsek
Pismeni ispit iz Analize 2
18.4.2017.

1. (E1-4 poena, E2-4 poena) Pokazati da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}$ konvergira uslovno, ali ne konvergira apsolutno. Naći sumu datog reda sa tačnošću $\epsilon = 0.2$.

2. (E1-8 poena, E2-7 poena) Odrediti oblast konvergencije i naći sumu reda $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+n-2}(2x+1)^n$.

3. (E1-7 poena, E2-6 poena) Ispitati uniformnu i apslolutnu konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{3^n x}{1+25^n x^2}$, za $x \in \mathbb{R}$.

4. (E1-7 poena, E2-6 poena) Izračunati zapreminu tela:
$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le 4 - x^2 - y^2,\ x^2+y^2 \le 2x,\ x^2+y^2 \le 2y\}$.

5. (E1-8 poena, E2-8 poena) Izračunati vrednost krivolinijskog integrala $\int_L -ydx + xdy$ po krivoj:
$L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1,\ 0 \le x \le \frac{\sqrt{2}}{2},\ y \ge 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 2,\ 0 \le x \le 1,\ y \ge 0\} \cup$
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x,\ \frac{\sqrt{2}}{2} \le x \le 1\}$, koja je orijentisana od tačke $A(0,1)$ ka tački $B(0,\sqrt{2})$.
   (a) Direktno;
   (b) Primenom Grinove formule.

6. (E1-8 poena, E2-8 poena) Preslikavanjem $w = \frac{1}{e^{\frac{-2\pi i}{z-2i+1}} - 1} + \frac{1}{2}$ preslikati oblast:
$G = \{z \in \mathbb{C} : |z-2i| > 1, Re\ z > -1, Im\ z > 2\}$.

7. (E1-7 poena, E2-7 poena) Ispitati singularitete funkcije $f(z) = \frac{\sin^2 z}{z^5 - 4z^3}$ i izračunati $\int_L f(z)dz$, ako je kriva
$L = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r,\ r > 0,\ r \ne 2\}$, pozitivno orijentisana.

8. (E1-6 poena) Odrediti analitičku funkciju $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z = x + iy$, ako je $v(x,y) = 2y(x+1)$ i $f(0) = 1$. Izračunati $f'(0)$.

9. (E2-5 poena) Razviti funkciju $f(x) = |x| + 1$ u Furijeov red na intervalu $[-1,1]$, a zatim izračunati sumu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

10. (E2-4 poena) Koristeći Laplasovu transformaciju, rešiti integralnu jednačinu:

$$y(x) + e^{3x} - \int_0^x e^{3(x-u)} y(u)\, du = xe^{3x}.$$

Teorija:

1. (15 poena)

2. (15 poena)

3. (15 poena) (Teorijski zadatak) Data je funkcija $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1}$.
   (a) Razviti u Maklorenov red funkciju $f(x)$ i napisati gde dobijeni razvoj konvergira.
   (b) Koristeći dobijeni razvoj, dokazati da je $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}(2n+1)} > \frac{\pi}{12}$.
   (c) Bez korišćenja Lopitalovog pravila, izračunati $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) + \frac{\pi}{4}}{x}$.