$\boxed{\text{A}}$ **ALGEBRA - KOLOKVIJUM 2** **23.01.2022.**

1. Date su tačke $A(0,1,1)$ i $B(1,1,0)$, i ravan $\alpha : x+y+z=0$. Odrediti tačku C tako da trougao ABC bude jednakostraničan i ravan trougla ABC bude paralelna sa ravni α.

2. Dokazati da je skup rešenja $\mathcal{R}$ sistema linearnih jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & 4z & = & 0 \\ 2x & - & 3y & + & 6z & = & 0 \\ -x & + & y & - & 2z & = & 0 \end{array}$$

potprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$, i odrediti jednu bazu tog potprostora.

3. Data je ravan $\alpha : x-y-z=0$. Neka je $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ projekcija na ravan α, i neka je $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ ravanska simetrija u odnosu na na ravan α. Dokazati da su f i g linearne transformacije, i izračunati rangove njihovih matrica.

REŠENJA

1. Vektor normale ravni α je $\vec{n}_\alpha=(1,1,1)$. Kako je
$\overrightarrow{AB}=\vec{r}_B-\vec{r}_A=(1,1,0)-(0,1,1)=(1,0,-1)$,
$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}_\alpha=(1,0,-1)\cdot(1,1,1)=0$,
sledi da je $\overrightarrow{AB}\parallel\alpha$, te postoji rešenje zadatka. Neka je S sredina duži AB. Kako je ravan trougla ABC paralelna sa ravni α, sledi da je $\overrightarrow{SC}\parallel\alpha$ odnosno $\overrightarrow{SC}\perp\vec{n}_\alpha$. S druge strane je $\overrightarrow{SC}\perp\overrightarrow{AB}$, te je

$$\overrightarrow{SC}\parallel\vec{m}=\vec{n}_\alpha\times\overrightarrow{AB}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix}=(-1,2,-1).$$

SC je visina jednakostraničnog trougla stranice AB, te je $|\overrightarrow{SC}|=\frac{\sqrt{3}}{2}|\overrightarrow{AB}|$. Tako dobijamo

$$\vec{r}_S=\frac{1}{2}(\vec{r}_A+\vec{r}_B)=\frac{1}{2}((0,1,1)+(1,1,0))=(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}),$$

$$\vec{r}_{C_1,C_2}=\vec{r}_S\pm\frac{\sqrt{3}}{2}|\overrightarrow{AB}|\frac{\vec{m}}{|\vec{m}|}=(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})\pm\frac{\sqrt{3}}{2}|(1,0,-1)|\frac{(-1,2,-1)}{|(-1,2,-1)|}$$

$$=(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2}\frac{(-1,2,-1)}{\sqrt{6}}=(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})\pm\frac{1}{2}(-1,2,-1)=(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})\pm(-\frac{1}{2},1,-\frac{1}{2}),$$

$$\vec{r}_{C_1}=(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})+(-\frac{1}{2},1,-\frac{1}{2})=(0,2,0),$$

$$\vec{r}_{C_2}=(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})-(-\frac{1}{2},1,-\frac{1}{2})=(1,0,1)$$

(zadatak ima dva rešenja).

2. Nakon što prvu jednačinu pomnoženu sa -2 dodamo na drugu, prvu jednačinu dodamo na treću, a zatim drugu jednačinu dodamo na treću, dobijamo ekvivalentan sistem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & 4z & = & 0 \\ & & y & - & 2z & = & 0 \end{array}$$

čiji je skup rešenja

$\mathcal{R}=\{(0,2\alpha,\alpha)\mid\alpha\in\mathbb{R}\}=\{\alpha(0,2,1)\mid\alpha\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Lin}((0,2,1))$.

Sledi da je $\mathcal{R}$, kao lineal, potorostor prostora $\mathbb{R}^3$ (teorema). Jedna baza mu je $\{(0,2,1)\}$ jer je, kao lineal nad $(0,2,1)$, skup $\mathcal{R}$ generisan sa $(0,2,1)$, a vektor $(0,2,1)\neq\vec{0}$ je i linearno nezavisan.

3. Ravan α sadrži tačku $O(0,0,0)$ i normalna je na vektor $\vec{n}=(1,-1,-1)$. Za proizvoljno $\vec{r}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, primenom formule za projekciju tačke (x,y,z) na ravan α dobijamo

$$f(x,y,z)=\vec{r}+\frac{(\vec{r}_O-\vec{r})\cdot\vec{n}}{\vec{n}\cdot\vec{n}}\vec{n}=(x,y,z)+\frac{((0,0,0)-(x,y,z))\cdot(1,-1,-1)}{(1,-1,-1)\cdot(1,-1,-1)}(1,-1,-1)$$

$$= (x,y,z) + \frac{(-x,-y,-z)\cdot(1,-1,-1)}{3}(1,-1,-1) = (x,y,z) + \frac{-x+y+z}{3}(1,-1,-1)$$
$$= (x,y,z) + \left(-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}z, \frac{1}{3}x-\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}z, \frac{1}{3}x-\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}z\right)$$
$$= \left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}z, \frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y-\frac{1}{3}z, \frac{1}{3}x-\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}z\right).$$

Za ravansku simetriju g imamo da je $\overrightarrow{(x,y,z)f(x,y,z)} = \overrightarrow{f(x,y,z)g(x,y,z)}$, te je

$$g(x,y,z) = 2f(x,y,z) - (x,y,z)$$
$$= \left(\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}z, \frac{2}{3}x+\frac{4}{3}y-\frac{2}{3}z, \frac{2}{3}x-\frac{2}{3}y+\frac{4}{3}z\right) - (x,y,z)$$
$$= \left(\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}z, \frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y-\frac{2}{3}z, \frac{2}{3}x-\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}z\right).$$

Iz izraza kojima su funkcije f i g definisane vidimo da jesu linearne transformacije sa matricama

$$M_f = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \qquad M_g = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Kako je

$$M_f \overset{[1]}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \overset{[2]}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \end{bmatrix} \overset{[3]}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

sledi da je $\operatorname{rang}(M_f) = 2$. Kako je

$$M_g \overset{[1]}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \overset{[4]}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -2 \end{bmatrix} \overset{[5]}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix},$$

sledi da je $\operatorname{rang}(M_g) = 3$.

[1] - Matricu množimo sa 3.

[2] - Prvu vrstu dodamo na drugu, i prvu vrstu pomnoženu sa -2 dodamo na treću.

[3] - Drugu vrstu dodamo na treću.

[4] - Prvu vrstu pomnoženu sa -2 dodamo na drugu i treću.

[5] - Drugu vrstu pomnoženu sa -2 dodamo na treću.